F 1130/2 Li 040061

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

SERIA ELECTROTEHNICĂ

TOMUL XLVI – XLVII 1984 – 1985

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*
MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan*; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. docent *Felicia Cornea*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. docent *Traian Demian*; Prof. dr. ing. *Gleb Dăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu*; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu*; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț*; Prof. dr. docent *Florea Oprea*; Prof. dr. ing, *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Mircea Postelnicescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *George Rulea*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spălaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through
ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378
Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

Nicoleta Poesina, M. Roşculeţ

Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. X. Sisteme de ecuaţii Laplace. Formule de medie 8

D. Marcu

k-grafuri în grafuri regulate (l. engleză) 15

C. Popescu

Asupra simplexelor finit dimensionale 19

M. Roşculeţ, P. Cocârlan

Funcţii monogene pe algebre necomutative. *I.* Funcţii regulate pe o algebră de ordinul *4* 25

S. Corbu

Asupra unui model stocastic discret cu matrice de trecere perturbată 30

I. M. Popescu, A. Podoleanu

Studiu teoretic asupra laserului în regim mode-locking cu modulator electrooptic în cavitate cuplată 37

V. Iancu, D. Iordache, Tatiana Pop, Luminiţa Daniello, Agneta Rado, E. Sava

Probleme fizice implicate în proiectarea cablurilor criogenice. IV. Studiul expresiilor semiempirice ale factorului de frecare Darcy pentru curgeri monofazice în conducte rugoase (l. engleză) 45

Rodica Bena, Iuliana Cuculescu, M. Opran, Carmina Plosceanu

Dispozitiv cu cristale lichide pentru atenuarea transmisiei prin fibre optice (l. engleză) 58

E. C. Niculescu, P. Marian, I. M. Popescu

Calculul unor nivele adînci pentru impurităţi interstiţiale în siliciu 65

D. Iordache, V. Iancu, R. Lungu, G. Lăzărescu, Tatiana Pop, L. Aldea, V. Iordache

Probleme fizice implicate în proiectarea cablurilor criogenice. V. Posibilităţi de interpretare teoretică a relaţiilor semiempirice care descriu schimbul termic convectiv (l. engleză) 70

Gh. Hortopan

Stand pentru determinarea ratei de pierdere a vidului în camerele de stingere 81

Carmen Golovanov, P. Manolescu

Metodă de determinare a puterilor activă şi reactivă într-un punct oarecare al unei linii lungi 100

A. Moraru, M. Covrig

Metodă pentru determinarea parametrilor funcţionali ai maşinii asincrone prin rezolvarea problemei de cîmp electromagnetic 110

D. Stanomir

Modelarea cîmpului de dispersie al capului magnetic de înregistrare (l. engleză) . . . 120

G. V. Bafas

Comunicațiile numerice și transferul de tehnologie (l. engleză) 129

Carmen Golovanov, P. Manolescu, N. Badea

Două tipuri de teslametre pentru determinarea distribuției spațiale a cîmpului magnetic a electrolizoarele Întreprinderii de aluminiu Slatina 140

P. Noțingher, A. Ifrim

Influența sarcinii spațiale asupra străpungerii dielectricilor solizi 156

M. Iordache, Lucia Dumitriu, N. Marinescu

Modele discrete asociate de circuit pentru bobinele și condensatoarele parametrice 169

M. Mihalache

Calculul numeric al cîmpului de dispersie din transformatorul electric 174

I. F. Soran

Modelarea magneților permanenți pentru calcule numerice (l. franceză) 181

C. Staicu.

Mărimea fundamentală în științele tehnice 189

A. I. Degutis, P. I. Kostrauskas

Micromotorul asincron monofazat cu miezul feromagnetic statoric asimetric — metodica de calcul a caracteristicii mecanice 198

Summary

Nicoleta Poesina, M. Roşculeţ

Integral Operators Generalising Partial Differential Equations X. Laplace's Systems. Mean Formulas 8

D. Marcu

k-Graphs in Regular Graphs 15

C. Popescu

On Finite Dimensional Simplexes 19

M. Roşculeţ, P. Cocârlan

Monogene Functions on Uncommutative Algebras 25

S. Corbu

On a Discrete Stochastic Model with a Perturbated Passage Matrix 30

I. M. Popescu, A. Podoleanu

Theoretical Study on the Mode-Locking Operation Using Electrooptic Modulator in Coupled Cavity 37

V. Iancu, D. Iordache, Tatiana Pop, Luminiţa Daniello, Agneta Rado, E. Sava

Study of Semiempirical Expressions of the Darcy Friction for Monophasic Flows in Rough Pipes 45

Rodica Bena, Iuliana Cuculescu, M. Opran, Carmina Ploscea nu

Liquid Crystal Signal Attenuation Device for Optical Fibers 58

E. C. Niculescu, P. Marian, I. M. Popescu

Calculus of Deep Levels for Interstitial Impurities in Si 65

D. Iordache, V. Iancu, R. Lungu, G. Lăzărescu, Tatiana Pop, L. Aldea, V. Iordache

Possibilities of Theoretical Interpretation of the Semiempirical Relations Describing the Convective Heat Transfer 70

Gh. Hortopan

Apparatus for Measuring the Pressure Inside a Vacuum Circuit Interrupter 81

Carmen Golovanov, P. Manolescu

Method for Determining the Active and Reactive Power at Any Point of a Long Line 100

A. Moraru, M. Covrig

Method for Parameter Determination of the Induction Machine by Electromagnetic Field Solution 110

D. Stanomir

Modelling the Leakage Magnetic Field of the Magnetic Recording Head 120

G. V. Bafas

Digital Communication and Transfer of Technology 129

Carmen Golovanov, P. Manolescu, N. Badea

Two Types of Fluxmeters for the Determination of the Spatial Distribution of the Magnetic Field ar the Electrolyzers of the Aluminium Plant of Slatina 140

P. Noţingher, A. Ifrim

Influence of the Space Charge on the Breakdown of the Solid Dielectric 156

M. Iordache, Lucia Dumitriu N. Marinescu

Associated Discrete Circuit Models for Parameter Inductors and Capacitors 169

M. Mihalache

Calculus of Dispersion Field in Electric Transformer 174

I. F. Soran

A Simple Model of Permanent Magnet 181

C. Staicu

The Fundamental Physical Quantity in Technical Sciences 189

A. I. Degutis, P. I. Kostrauskas

Fractional Horspower Asymmetrical Stator Induction Motor and Methodic for the Calculus of the Mechanical Characteristic 198

SCIENTIFIC RESEARCH IN THE POLYTECHNIC INSTITUTE OE BUCHAREST

With its 26.500 undergraduates and Ph.D students, as well as 1 500 teaching staff working in 12 faculties and 55 departments, the Polytechnic Institute of Bucharest has always been the largest higher education institution in Romania. In fact, from the first engineering courses taught in Romanian, organized in 1818 by the scholar Gheorghe Lazăr, the long succession of engineering schools and of their graduates has only confirmed the technical capacity and inclination of our country and its capital. The distance covered from the former National School of Bridges and Roads, which celebrated its centenary in 1981, to the present day citadel, can be viewed as the ascending line joining aspiration to fulfilment. The admiration for their brilliant forerunners is a strong incentive to present day disciples to rise to the challenge of the contemporary technical and scientific revolution.

The novel, revolutionary principle of the integration of education with research and production, worked out by Comrade Nicolae Ceaușescu, the president of our country, underlies the whole process of education and training our students for work, through work.

The necessary blending of scientific creation and industrial production in the education and training of engineers has been generalized notionwide, in keeping with the provisions of the laws in force at present. A wide spectrum training of specialist enables them to cope with the problems raised every day by the information explosion and the spectacular changes in the national economy. Thus, in the last few years only, new educational structures have been set up directly in response to the demands made by industry. This has resulted in the emergence of new lines of specialization such as : production of coke and coal products special purpose metallurgical products, robotics, biochemistry, chemical equipment and engineering, welding technology and equipment, etc.

Professors and students are directly involved together with specialists from research and industry in the solution of highly important problems such as : mechanization and automation of operations in hot sections, widening of the range of materials used in microelectronics, nuclear power engineering and aeronautics, development of high performance machines, of control and computer equipment, of industrial robots etc.

The main targets of research, as well as of design and microproduction activities in different engineering fields focus on topics put forward by our economy, which require the setting up of joint teams of specialists from different fields, who will follow up the respective project until it is actually applied in industry. The Polytechnic teaching staff and students have worked on many such important projects, for example : integrated circuit grids, aluminium and gold wire drawing technologies, high speed steels with low contents of expensive or scarce elements, titan and zirconium alloys used in nuclear power engineering, technologies used to obtain high purity chemical

compounds, the study of the processes involved in starting synchronous motors driving turbocompressors, the reduction of energy consumption in pumping stations used for irrigations of hydrotransport in mines, control systems for industrial robots, new technologies for electronic components and devices, techniques to eliminate hydrocarbon addition by coal gasification used to sustain combustion in burning bituminous schists, design of special machine-tools, new technologies and modulated devices for high quality processing and testing, high performance farming equipment, production of synthetic elastomers by open ring polymerization of cyclopentadiene, microcomputers, microwave digital relays, interactive graphical systems for computer aided design, etc.

In embarking upon the solution of high priority projects required by the national economy, research teams start from the topics included in the national plan for scientific research, technological development and the implementation of technical and scientific progress, coordinated by the National Council for Science and Technology, led by academician Elena Ceaușescu, BSc, PhD, vice-prime minister of the government and brilliant, world famous scientist. At the same time, long term fundamental research is encouraged in order to carry on and develop lines of research already pursued in our institute for a long time.

The Polytechnic Institute has greatly contributed to industrial development through research and the design of computing equipment, of different devices and installations. But of the various products being manufactured at present or just taken over by industry mention can be made of traffic monitoring equipment, M 18, M 118 and M 216 microcomputers, AMIC and Personal microcomputers, equipment for psychotechnical investigations, complex installations for poultry batteries, the DIALISP artificial intelligence machine, the DELTA microwave digital relay and many others. Of significant importance is the design and construction of an automatic line for chill casting, of test stands, sugar diffusion installations, technological aggregates, industrial robots, dimensional control devices, measuring and control equipment, etc.

The Polytechnic Institute is the organizer of a large number of national and international scientific meetings, a few of the most recent being The National Conference on Power Engineering, The Vth National Conference on Industrial Automatic and Information Systems, The 3rd Symposium on Microwave Technology, The 2nd Colloquium on Water Treatment Equipment, The Symposium on Electrical Machines Associated with Static Converters, The Vth National Conference on Machine-Tools, The IIIrd National Conference on Precision Mechanics, The National Conference on Chemistry and Chemical Engineering, The IIIrd National Symposium on Industrial Robots.

In the last three years, 110 teaching staff and 60 foreign citizens have been awarded doctoral degrees in the Polytechnic, in one of the 50 specialities listed for this degree.

By dealing with a wide range of problems, the scientific work carried on in the Polytechnic is an active factor in the promotion of scientific progress in our country. The importance of the part played by our teaching staff in the solution of research projects stemming from economic requirements is reflected in the 600 contract-based projects completed in 1984 alone.

The Polytechnic Bulletin is published yearly in 9 different issues: Electrical Engineering, Electronics, Control Engineering and Computers, Power Engineering, Mechanics, Machine Construction, Transport-Aerospace Engineering, Chemistry, Metallurgy, which are a sequel to the old periodicals: "Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", "Bulletin of the Polytechnic of Bucharest" and "Bulletin of the Gheorghe Gheorghiu-Dej Polytechnic of Bucharest". Among the contributors to the first issue in 1929 are Dan Barbilian, Elie Carafoli, Grigore Moisil, Octav Onicescu, Dimitrie Pompeiu, Gheorghe Ţiţeica, C. Vasilescu-Karpen.

The materials published in the Bulletin derive, first of all, from the results of the research carried out by the teaching staff of the Polytechnic, in collaboration with specialists from research institutes, from industry or from different scientific institutions. The students research papers are published side by side with those of their professors or of foreign academics. Complete collections of the Bulletin of the Polytechnic Institute of Bucharest exist both in our country and in well known foreign institutions, which testifies to the interest it anrises at home and abroad. It is our hope that this interest will continue to grow in the future.

prof. Voicu Tache, MSc. Ph. D
Rector of the Polytechnic Institute of Bucharest

C.Z.; 517. 987
517. 44

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE. X. SISTEME DE ECUAȚII LAPLACE. FORMULE DE MEDIE.

NICOLETA POESINA, M. ROȘCULEȚ*

Se pornește de la o funcție analitică în $m+n$ variabile în D_mXD_n și se obține relația integrală (6), din care se deduce formula de medie (9) pentru soluțiile analitice ale sistemului (8). Utilizînd mediile dublu iterate (16), pornind de la relația integrală (13) se obțin formule de medie pentru soluțiile analitice ale sistemului (10′).

1. Fie $f(x, y)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ o funcție analitică în D_mXD_n, $x \in D_m$, $y \in D_n$, $D_m \subset R^m$, $D_n \subset R^n$ și S_m, S_n, două sfere de centre a, b cu $a \in \overset{\circ}{D}_m$, $b \in \overset{\circ}{D}_n$ de raze R_1, R_2 situate în $\overset{\circ}{D}_m$ respectiv $\overset{\circ}{D}_n$.

Dacă punem

$$x_i = a_i + R_1\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ y_j = b_j + R_2\,\eta_j,\ j = 1, 2 \ldots n.$$

obținem

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_1^\infty \frac{1}{p!}\left[R_1\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right) + \right.$$

$$\left. + R_2\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \eta_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right]^{(p)} f(a, b). \tag{1}$$

Să considerăm acum integrala de ordin $m + n$ produsul cartezian al sferelor pline $S_m\ XS_n \subset R^m \times R^n$

$$I = \frac{1}{S_m^*(R_1)\ S_n^*(R_2)} \iint \ldots \int_{S_m} dv_m \iint \ldots \int_{S_n} f(x, y)\ dv_n \tag{2}$$

unde

$$S_m^*(R_1) \cdot S_n^*(R_2) = \pi^{\frac{m+n}{2}} R_1^m R_2^m\ \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2} + 1\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

* Asist.; Prof. dr., catedra Matematici

Dacă introducem pe (1) în (2) și integrăm termen cu termen, fapt permis, apar integrale de forma

$$I_{\alpha,\beta} = A_{\alpha\beta} \int_{S_m} R_1^{\alpha} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m} \, dv_m \int_{S_n} R_2^{\beta} \eta_1^{\beta_1} \ldots \eta_n^{\beta_n} \, dv_n, \tag{3}$$

unde

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$$

și

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{S_m^* \cdot S_2^*} \cdot \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_m!\beta_1!\beta_2! \ldots \beta_n!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(a,b)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}}$$

Integrala (3) este nulă dacă nu toți α_i și β_j sînt pari.
Să înlocuim pe α_i cu $2\alpha_i$ și pe β_j cu $2\beta_j$. Obținem

$$I_{2\alpha,2\beta} = A_{2\alpha,2\beta} \frac{R_1^{2\alpha+m} \cdot R_2^{2\beta+n}}{2^2(\alpha+\beta)} \cdot \frac{(2\alpha_1)! \ldots (2\alpha_m)!(2\beta_1)! \ldots (2\beta_n)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!\,\beta_1! \ldots \beta_n!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\beta+1\right)}$$

dacă ținem seamă și de $A_{2\alpha,2\beta}$, devine

$$I_{2\alpha,2\beta} = \frac{R_1^{2\alpha} \cdot R_2^{2\beta}}{2^{\alpha} \cdot 2^{\beta}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(m+2)(m+4) \ldots (m+2\alpha)(n+2)(n+4) \ldots (n+2\beta)} \cdot \tag{4}$$

$$\frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!\beta_1! \ldots \beta_n!} \cdot \frac{\partial^{2(\alpha+\beta)} f(a,b)}{\partial x_1^{2\alpha_1} \partial x_2^{2\alpha_2} \ldots \partial x_m^{2\alpha_m} \partial y_1^{2\beta_1} \partial y_2^{2\beta_2} \ldots \partial y_n^{2\beta_n}}$$

În (4) să păstrăm pe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ficși iar pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ variabili astfel încît $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = \alpha$, α fix.
Rezultatul însumării este

$$\frac{A_\beta}{2^{\alpha+\beta}} \frac{R_1^{2\alpha}}{(m+2)(m+4) \ldots (m+2\alpha)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right]^{(\alpha)} f(a, b) \tag{5}$$

unde A_β nu depinde de α și de α_i.
Să păstrăm pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ficși și să însumăm în raport cu $\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots \beta_n$, cu $\beta_1 + \ldots + \beta_n = \beta$, β fix.

Obţinem

$$\frac{1}{2^{\alpha+\beta}} A_\alpha^* \frac{R_2^{2\beta}}{(n+2)(n+4)\ldots(n+2\beta)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right]^{(\beta)} f(a, b) \tag{5'}$$

cu A_α^* independent de β şi β_j.

Teorema 1. Fie $f(x, y)$ o funcţie analitică în $D_m X D_n$, $x \in D_m \subset R^m$, $y \in D_n \subset R^n$.

Pentru orice $S_m X S_n$ unde S_m este sfera plină, de centru a şi rază R_1 situată în $\overset{\circ}{D}_m$, iar S_n este sfera plină, de centru b şi rază R_2 situată în $\overset{\circ}{D}_n$, are loc relaţia integrală

$$\frac{1}{S_m^* \cdot S_n^*} \iint \ldots \int_{S_m} dv_m \iint \ldots \int_{S_n} f(x, y)\, dv_n = f(a, b) +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{1}{p!}\left[R_1^2 \gamma_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) + \right. \tag{6}$$

$$\left. + R_2^2\, \delta_p \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(p)} f\,(a, b),$$

unde am notat

$$\left[R_1^2 \gamma_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) + R_2^2\, \delta_p \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(p)} f(a, b) =$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=p} \frac{p!}{\alpha!\,\beta!} \frac{1}{(m+2)(m+4)\ldots(m+2\alpha)} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+4)(n+2\beta)} \times \tag{7}$$

$$\times \left(\frac{R_1^2}{2}\right)^\alpha \left(\frac{R_2^2}{2}\right)^\beta \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)^{(\alpha)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)^{(\beta)}\right] f(a, b).$$

Demonstraţie. Rezultă din (5) şi (5'); q.e.d.

Din formula integrală (6) deducem următoarea

Teorema 2. Soluţiile sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_m^2} = 0,$$

$$\tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2} = 0,$$

analitice în $D_m \times D_n \subset R^m \times R^n$ verifică pentru orice $S_m \times S_n$ interior lui $D_m \times D_n$ următoarea formulă de medie

$$f(a,b) = \frac{1}{S_m^* \cdot S_n^*} \iint \ldots \int_{S_m(a)} \mathrm{d}v_m \iint \ldots \int_{S_n(b)} f(x,y)\, \mathrm{d}v_n. \tag{9}$$

Notațiile sînt aceleași ca la teorema 1.

2. Să introducem notațiile

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}, \quad \Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2},$$

și să observăm că o funcție w de clasă C și $D_m \times D_n$ dacă este o soluție a sistemului

$$\Delta_x^{p-k}\, \Delta_y^k\, (w) = 0,\ K = 0, 1, 2, \ldots, p\ , \tag{10}$$

atunci satisface și sistemul următor

$$\Delta_x^{r-h}\, \Delta_y^h\, (w) = 0,\ h = 0, 1, 2, \ldots, r \tag{10'}$$

pentru orice $r > p$.

Teorema 3. Soluțiile analitice în $D_m \times D_n$ ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\Delta_x^{p+1-k}\, \Delta_y^k\, (w) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, p+1 \tag{10''}$$

satisfac următoarea relație integrală

$$\frac{1}{S_m^* \cdot S_n^*} \iint \ldots \int_{S_m} \mathrm{d}v_m \iint \ldots \int_{S_n} f(x,\ y)\, \mathrm{d}v_n = f(a,\ b) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k\,!} [R_1^2 \gamma_k\, \Delta_x + R_2^2\, \delta_k\, \Delta_y]^{(k)} f(a,\ b)$$

pentru orice $S_m \times S_n$ interior lui $D_m \times D_n$, $D_m \subset R^m$, $D_n \subset R^n$, sferele pline S_m, S_n avînd centrele a, b și razele R_1, R_2 respectiv. γ_k și δ_k sînt aceiași ca la th. 1.

3. În condițiile pentru $f(x, y)$ de la aliniatul 1, să considerăm integrala

$$\tilde{I} = \frac{1}{\tilde{S}_m^*(R_1) \cdot \tilde{S}_n^*\,(R_2)} \iint \ldots \int_{\tilde{S}_m} \mathrm{d}\sigma_m \iint \ldots \int_{\tilde{S}_n} f(x,y)\ \mathrm{d}\sigma_n, \tag{12}$$

unde $\tilde{S}_m$ este frontiera lui S_m iar $\tilde{S}_n$ este frontiera lui S_n, $\mathrm{d}\sigma_m$ şi $\mathrm{d}\sigma_n$ sînt, respectiv elementul de arie pe $\tilde{S}_m$ şi $\tilde{S}_n \cdot \tilde{S}_m^*(R_1)$ şi $\tilde{S}_n^*(R_2)$ sînt măsura celor două frontiere, deci

$$\tilde{S}_m^*(R_1) \cdot \tilde{S}_n^m(R_2) = 4 \cdot \pi^{\frac{m+n}{2}} R_1^{m-1} R_2^{n-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)$$

În mod asemănător obţinem

Teorema 4, Fie $f(x, y)$ o funcţie analitică în $D_m \times D_n$, $x \in D_m \subset R^m$, $y \in D_n \subset R^n$. Pentru orice $\tilde{S}_m \times \tilde{S}_n$, unde $\tilde{S}_m$ este frontiera sferei de centru $a \in D_m$ şi rază R_1, situată în D_m, iar $\tilde{S}_n$ este frontiera sferei de centru b şi rază R_2 situată în D_n, are loc relaţia integrală

$$\frac{1}{\tilde{S}_m^* \cdot \tilde{S}_n^*} \iint \cdots \int_{\tilde{S}_m} \mathrm{d}\sigma_m \iint \cdots \int_{\tilde{S}_n} f(x - y)\, \mathrm{d}\sigma_n = f(a, b) + \tag{13}$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{1}{p!}\left[R_1^2 \gamma_p^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) + R_2^2 \delta_p^*\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(p)} (fa, b)$$

unde am notat

$$\left[R_1^2 \gamma_p^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) + R_2^2 \delta_p^*\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(p)} f(a, b) = \tag{14}$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=p} \frac{p!}{\alpha!\,\beta!} \frac{1}{m(m+2)\ldots(m+2\alpha-2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{n(n+2)\ldots(n+2\beta-2)} \times \left(\frac{R_1^2}{2}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{R_2^2}{2}\right)^\beta \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)^{(\alpha)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)^{(\beta)}\right] f(a, b)$$

Folosind relaţia integrală (13) şi notaţia (14) avem

Teorema 5. Soluţiile analitice în $D_m \times D_n \subset R^m \times R^n$ ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (10″) satisfac relaţia integrală

$$\frac{1}{\tilde{S}_m^* \tilde{S}_n^*} \iint \cdots \int_{\tilde{S}_m} \mathrm{d}\sigma_m \iint \cdots \int_{\tilde{S}_n} f(x, \eta)\mathrm{d}\sigma_n = f(a, b) + \tag{15}$$

$$+\sum_1^p \frac{1}{k!}\left[R_1^2\gamma_k^*\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)+R_2^2\,\delta_k^*\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(k)} f(a,\ b).$$

pentru orice $\tilde{S}_m \subset \mathring{D}_m$ și $\tilde{S}_n \subset \mathring{D}_n$.

4. Să introducem notațiile

$$\mu_{0,0}(a,\ b)=\frac{1}{\tilde{S}_m^*(R_1)\cdot\tilde{S}^*(R_2)}\iint\ldots\int_{\tilde{S}_m}\mathrm{d}\sigma_m\iint\ldots\int_{\tilde{S}_n}f(x,\ y)\ \mathrm{d}\sigma_n,$$

$$\mu_{1,1}(a,\ b)=\frac{1}{S_m^*\ (R_1)S_n^*\ (R_2)}\iint\ldots\int_{S_m}\mathrm{d}v_m\iint\ldots\int_{S_n}f(x,\ y)\ \mathrm{d}v_n,$$

cu ajutorul lor să construim mediile dublu iterate

$$\mu_{r,\,s}(a,\ b)=\frac{m}{R_1^m}\int_0^{R_1}R_1^{m-1}\ \mathrm{d}R_1\ \frac{n}{R_2^{n-1}}\int_0^{R}R_2^{n-1}\ \mu_{r-1,s-1}\ (a,\ b)\ \mathrm{d}R_2 \qquad (16)$$

care admit desfășurările

$$\mu_{r,s}(a,\ b)=f(a,\ b)+\sum_1^\infty\frac{1}{p\ !}\left[R_1^2\ \gamma_{pr}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\ R_2^2\ \delta_{ps}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\right]^{(p)} f(a,\ b) \qquad (16')$$

unde am pus

$$\left[R_1^2\,\gamma_{p,r}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)+R_2^2\,\delta_{ps}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial y_n}\right)\right]^{(p)}=$$

$$=\sum_{\alpha+\beta=p}\frac{p\ !}{\alpha\ !\ \beta\ !}\,\frac{m^r}{(m+2\alpha)^r\ m(m+2)\ldots(m+2\alpha-2)}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{n^s}{(n+2\beta)^s\ n(n+2)\ldots(n+2\beta-2)}\times\left(\frac{R_1^2}{2}\right)^\alpha\left(\frac{R_2^2}{2}\right)^\beta\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)^{(\alpha)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)^{(\beta)}\right]f\ (a,\ b),$$

Pentru fiecare pereche (r, s) din (16′) se obţine o formulă de medie de forma (9) pentru sistemul (8).
Din fiecare relaţie (16′) se obţine o relaţie integrală de forma (11) pentru soluţiile sistemului (10″).

Pentru sistemul (10″) dacă luăm $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ astfel de relaţii (11) şi eliminăm între ele operatorii

$$\Delta_x^{p^*-k}\ \Delta_y^k\ (w),\ k = 0, 1, \ldots p^*;\ p^* = 1, 2, \ldots, p. \tag{17}$$

obţinem formule de medie pentru soluţiile analitice ale sistemului (10″). În particular pentru sistemul

$$\Delta_x\ \Delta_x\ (u) = 0,\ \Delta_x\ \Delta_y\ (u) = 0,\ \Delta_y\ \Delta_y\ (u) = 0$$

folosind relaţiile integrale generate de μ_{00}, μ_{01}, μ_{11}, obţinem
Teorema 6. Soluţiile analitice în $D_m \times D_n \subset R^m \times R^n$ ale sistemului (17) verifică următoarea formulă de medie

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{n+2} \\ 1 & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{n+2} \end{vmatrix} f(a, b) = \begin{vmatrix} \mu_{00}(a, b) & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ \mu_{01}(a, b) & \frac{1}{m} & \frac{1}{n+2} \\ \mu_{11}(a, b) & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{n+2} \end{vmatrix} \tag{18}$$

pentru S_m interior lui D_m şi S_n interior lui D_n.

BIBLIOGRAFIE

1. *N. Ciorănescu*, Opera matematică. Edit. Academiei Republicii Socialiste România, 1975.
2. *M. Nicolescu*, Les fonctions polyharmoniques. Actualités scientifiques et ind. 33, vol. 4, Paris 1936.
3. *M. Roşculeţ*, Revue de math. pures et appliquées, tome V, 1960, nr. 2, pag. 287–313.

Opérateurs intégraux qui généralisent les équations différentielles. X. Systhèmes d'équations de Laplace. Formules de moyenne.

On intègre une fonction analytique en $m + n$ variables sur $S_m \times S_n$ et on obtient la relation intégrale (6), d'oú on déduit la formule de moyenne (9) pour les solutions analytiques du systhème (8).
En utilisant les moyennes doublement itérées (16) et la relation intégrale (13) on obtient des formules de moyenne pour les solutions analytiques du systhème (10″).

C.Z: 519. 1
519. 17

K-GRAPHS IN REGULAR GRAPHS

D. MARCU*

Defining the k-graphs, we give sufficient conditions in which a regular graph contains a k-graph. In particular, if $k = 2$, a k-graph is a 1-factor [3, 4], but this liaison does not carry over for every k, i. e., a k-graph is not always a $(k\text{-}1)$-factor [4].

Introduction

The graph-theoretic terminology, used in this note, is standard and is based essentially on the book of Harary [1]. A *graph* G consists of a set V of *vertices* and a set E of *edges*, that is, of unordered pairs (u, v) of vertices. An edge which joins a vertex to itself is called a *loop*. Two edges which have a common pair of endpoints will be called *parallel*, and a graph with no loops or parallel elements is called *simple*. Throughout, by a graph, we shall understand, in fact, a simple graph. A *path*, in G, is a finite sequence of edges $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{p-1}, v_p)$, where v $(1 \leqslant i \leqslant p)$ are distinct elements of V. A *cycle* is a path for which $v_1 = v_p$. A *Hamiltonian path (Hamiltonian cycle)* is a path (cycle) that passes through each of the vertices in graph, exactly once. The *length* of a path (a cycle) is defined as the number of edges in the path (cycle). For a graph G we shall denote by $L(G)$ the maximum length of a path, in G. In a graph, two vertices are said to be *connected* if there is a path between them. A graph is said to be *connected* if every two vertices in graph are connected and, is said *unconnected*, otherwise. A graph $S = (W, F)$ is a *subgraph* of G if W is a subset of V and F is a subset of E. It follows that an unconnected graph consists of two or more subgraphs called *connected components*, each of which being a connected graph. The simple graph on n vertices, in which each pair of vertices is joined, is the *complete* graph $K(n)$. Obviously, such a graph contains a Hamiltonian cycle and, thereby, a Hamiltonian path. A graph $H = (V, F)$ is a *partial graph* of G if F is a subset of E. $K_1(n)$ will denote the partial graph of K(n) obtained by deleting the edges of a Hamiltonian cycle, and $K_2(t)$ the partial graph of $K(n)$ obtained by deleting the alternate edges of a Hamiltonian cycle. If G consists of two connected components C_1 and C_2, then we shall write $G = C_1 \bigcup C_2$.

* Researcher, University of Bucharest-Faculty of Mathematics.

An edge is said to be *incident* with the vertices it joins. In a graph, the degree of a vertex v, denoted by $d(v)$, is the number of edges that are incident with it.

A graph G is said to be *regular of degree* $\mathrm{d}(G)$ if $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}(G)$ for each v in V.

Throughout this paper, G will be a graph on n vertices, and k, m two non-negative integers such that $n = mk$ and $k \geqslant 2$.

A *k-graph* K is a partial unconnected graph of G in which every connected component of K contains k vertices. In particular, if $k = 2$, a k-graph is a 1-factor [3,4], but this liaison does not carry over for every k, i.e., a k-graph is not always a $(k\text{-}1)$-factor [4].

Our aim, in this note, is to give sufficient conditions for a regular graph to contain a k-graph.

The main results. Throughout, we shall make use of the following graph theory theorems :

(T_1) [2, pag. 55). If G is a connected regular graph, then either $L(G) \geqslant 2\mathrm{d}(G)$ or G contains a Hamiltonian cycle.

($T2$) [2, pag. 55]. If G is a regular graph on n vertices and $\mathrm{d}(G) \geqslant (n - 1)/2$, then G contains a Hamiltonian path.

Lemma. *If G contains a Hamiltonin path, then G contains a k-graph.*

Proof. Let $H = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ be a Hamiltonian path of G and let us consider the following subpaths of H :

$$P_1 = (v_1, \ldots, v_k)$$

$$P_2 = (v_{k+1}, \ldots, v_{2k})$$

$$\vdots$$

$$P_m = (v_{(m-1)k+1}, \ldots, v_n)$$

We denote by $E(P_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, the edge set of the path P_i.

The graph $K = (V, F)$, with $F = \bigcup_{i=1}^{m} E(P_i)$, is readily seen to be a k-graph of G.

Corollary 1. *If G is a regular graph with $d(G) \geqslant (n - 1)/2$, then G contains a k-graph.*

Proof. It follows from (T2) and the above lemma.

Proposition 1. *If m is odd and k is even, then there exists an unconnected regular graph G of degree $d(G) = n/2 - 1$, such that G does not contain a k-graph.*

Proof. The desired graph is $G = K(n/2) \cup K(n/2)$, since $n/2$ is not divisible by k.

Proposition 2. *If m is odd, k is odd and $(n + 1)/2$ is even, then there exists an unconnected regular graph G of degree $d(G) = (n - 3)/2$, such that G does not contain a k-graph.*

Proof. The desired graph is $G = K((n - 1)/2) \cup K_2((n + 1)/2)$, since $(n - 1)/2$ and $(n + 1)/2$ are not divisible by k.

Proposition 3. *If m is odd, k is odd and $(n+1)/2$ is odd, then there exists an unconnected regular graph G of degree $d(G) = (n-5)/2$, such that G does not contain a k-graph.*

Proof. The desired graph is $G = K_1((n+1)/2) \cup K_2((n-1)/2)$, since $(n+1)/2$ and $(n-1)/2$ are not divisible by k.

Corollary 2. *If G s a regular graph of degree $d(G) \geqslant (n-3)/2$, m is odd, k is odd and $(n+1)/2$ is odd, then G contains a k-graph.*

Proof. It follows from the proposition 3.

Theorem. *If G is a regular graph of degree $d(G) = n/2 - 1$ and m is even, then G contains a k-graph.*

Proof. Suppose that G does not contain a k-graph. (1)

Thus, G must be connected as otherwise it contains a k-graph. Indeed, if G is not connected, then $G = K(n/2) \cup K(n/2)$, since it is regular of degree $d(G) = n/2 - 1$. But, $n/2$ is divisible by k and, therefore, G contains a k-graph, contradicting (1).

Since G is connected, then, by (1), (T1) and lemma, it follows that $L(G) \geqslant n-2$.

If $L(G) = n-1$, the G contains a Hamiltonian path and, by the above lemma, we obtain a contradiction with (1). Thus, $L(G) = n-2$.

Without loss of generality, we may assume the vertices of G numbered in such a way that $P = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ is a path of length $L(G) = n-2$.

Suppose that G has an edge (v_i, v_n), $1 \leqslant i \leqslant n-1$, such that $i = pk + q$, p and q being non-negative integers, and $1 \leqslant q < k$.

We shall consider the following paths:

$$P_1 = (v_1, \ldots, v_k),$$

$$P_2 = (v_{k+1}, \ldots, v_{2k}),$$

$$\vdots$$

$$P_p = (v_{(p-1)k+1}, \ldots, v_{pk}),$$

$$P_{p+1} = (v_{(p+1)k}, \ldots, v_{(p+2)k-1}),$$

$$P_{p+2} = (v_{(p+2)k}, \ldots, v_{(p+3)k-1}),$$

$$\vdots$$

$$P_{p+r} = (v_{(p+r)k}, \ldots, v_{n-1})$$

where $r = m - p - 1$.

Obviously, the graph $K = (V, F)$, with

$$F = \left(\bigcup_{t=1}^{p+r} E(P_t)\right) \cup (v_{1k+1}, v_{pk+2}) \cup \ldots \cup (v_i, v_n) \cup (v_i, v_{i+1}) \cup$$

$(v_{i+1}, v_{i+2}) \cup \ldots \cup (v_{(p+1)k-2}, v_{(p+1)k-1})$, is a k-graph of G, contradicting (1). Thus, each edge (v_i, v_n), $1 \leqslant i \leqslant n-1$, must be such that i is a multiple of k, i. e., $i = pk$. But, according to the hypothesis, there exist $n/k - 1$ numbers in $\{1, 2, \ldots n-1\}$ that are multiple of k. Hence, the value $d(v_n) = d(G) = n/2 - 1$ can be attained only for $k = 2$ and only when

$$(v_i, v_n) \in E, \text{ for each } i = 2p, \ 1 \leqslant p \leqslant n/2 - 1. \tag{2}$$

Suppose now that G contains an edge (v_i, v_j), $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, such that both i and j are odd. Without loss of generality, we can consider $i < j$. It is readily to see that $K = (V, F)$, with

$$F = (v_1, v_2) \cup \ldots \cup (v_{i-2}, v_{i-1}) \cup (v_{i+1}, v_{i+2}) \cup \ldots \cup (v_{j-3}, v_{j-2}) \cup$$

$$\cup (v_{j-1}, v_n) \cup (v_{j+1}, v_{j+2}) \cup \ldots \cup (v_{n-2}, v_{n-1}),$$

s a 2-graph of G, contradicting (1). Therefore, in order to have $d(v_i) = d(G) = n/2 - 1$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, every vertex v_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, for which is odd, must be joined by an edge with every even numbered vertex.

Let v_s, $1 \leqslant s < n-1$, be a vertex with s even. Since there exist $n/2$ odd numbered vertices, it follows, from (2), that $d(v_s) \geqslant n/2 + 1$. On the other hand, by hypothesis, we have $d(v_s) = d(G) = n/2 - 1$. Hence, (1) yields to a contradiction and, therefore, the theorem is proved

Proposition 4. *If m is even, then exists an unconnected regular graph G of degree $d(G) = n/2-2$, such that G does not contain a k-graph.*

Proof. The desired graph is $G = K(n/2 - 1) \cup K_1(n/2 + 1)$, since $n/2 - 1$ and $n/2 + 1$ are not divisible by k.

Corollary 3. *If G is a regular graph of degree $d(G) \geqslant (n-2)/2$ and m is even, then G contains a k-graph.*

Prof. It follows from the proposition 4.

REFERENCES

1. *F. Harary*, Graph theory, Addison-Wesley, Reading Mass., 1969.
2. *O. Ore*, Theory of graphs, Providence, Rhode Island, 1962.
3. *W. T. Tutte*, J. London Math. Soc, 22, 1947, 107—111.
4. *W. T. Tutte*, Canad. J. Math., 4, 1952, 314—328.

K-grafuri în grafuri regulate

Definind noțiunea de k-graf, se dau condiții suficiente în care un graf regulat conține o astfel de configurație.

C.Z. 514. 164

ASUPRA SIMPLEXELOR FINIT DIMENSIONALE

C. POPESCU*

Lucrarea urmărește extinderea unor proprietăți ale proiecției ortogonale a tetraedrelor și paralelipipedelor din R^3 la cazul general al spațiului R^m. Rezultatele obținute ne permit explicarea modului de reprezentare în plan a paralelipipedului 3-dim, precum și posibilitatea vizualizării în plan sau în spațiu a simplexului și paralelipipedului 4-dim.

I. Introducere

Să considerăm în subspațiul k-dim $E^k \subset R^m$ $(m \geqslant k)$ baza ortogonală $W_k = \{e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$; o asemenea bază există conform teoremei Gram — Schmidt. Întrucît R^m este un spațiu Hilbert se poate construi o bază ortogonală $W_m = \{f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ a lui R^m astfel încît $f_i = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. De aceea putem presupune de la început că $U_m = \{g_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ este o bază ortogonală în R^m astfel încît $U_k = \{g_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ este bază în E^k.

Fie $x \in R^m$ un punct oarecare. Punctul $y \in E^k$ se numește *proiecția ortogonală* a lui x pe E^k dacă $(x - y, g_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, unde prin (a, b) s-a notat produsul scalar al vectorilor a și b din R^m. Se observă ușor că, asociind fiecărui punct $x \in R^m$ proiecția sa ortogonală $y \in E^k$, definim un operator liniar $p : R^m \to E^k$, $y = p(x)$. Deoarece R^m și E^k sînt spații liniare normate finit dimensionale, urmează că operatorul p este continuu.

Reamintim că dacă M este o submulțime a unui spațiu vectorial, atunci intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin pe M se numește *acoperirea convexă* a lui M și se notează *co* M. Se arată ușor că elementele lui *co* M sînt acele puncte x ale spațiului care pot fi scrise sub forma $x = \Sigma\lambda_i x_i$, suma fiind finită, $x_i \in M$, iar numerele pozitive λ_i satisfac egalitatea $\Sigma\lambda_i = 1$.

II. Simplexe finit dimensionale

În acest paragraf vom studia cîteva proprietăți legate de proiecția ortogonală a unui simplex finit dimensional pe un subspațiu cu un număr mai mic de dimensiuni. Notațiile utilizate vor fi cele din paragraful precedent.

Propoziția 1. *Fie* $B = \{b_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n\} \subset E^k$ $(m \geqslant n \geqslant k + 1,\ k \geqslant 1)$ *Dacă există* $k + 1$ *puncte liniar independente în* B, *atunci există un sim-*

* Ing., I.C.P.E. București

plex n-dim $A^n \subset R^m$ *cu vîrfurile* a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, *astfel încît* $p(a_i) = b_i$, $o \leqslant i \leqslant n$, *și* $p[A^n] = co\ B$.

Demonstrație. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că cele $k+1$ puncte liniar independente din B sînt b_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Luînd $a_i = b_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, și $a_i = b_i + \lambda_i g_i$, $\lambda_i \neq 0$, $k+1 \leqslant i \leqslant n$ (fig. 1, în care $m = n = 3$ și $k = 2$), se verifică ușor că a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, sînt vîrfurile simplexului căutat. Egalitatea $p[A^n] = co\ B$ rezultă din liniaritatea lui p. Tot din liniaritatea lui p mai deducem că proiecția ortogonală pe E^k a feței q-dim $a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_q}$ a lui A^n este $co\{b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}\}$, unde $0 \leqslant q \leqslant n$.

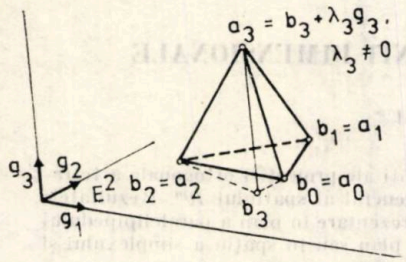


Fig. 1 –Relativă la propoziția II.1.

Propoziția 1 admite următoarea reciprocă :

Propoziția 2. *Fie* $A^n \subset R^m (m \geqslant n)$ *un simplex n-dim cu vîrfurile* a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. *Atunci există un subspațiu k-dim* $E^k \subset R^m (n \geqslant k+1$ *și* $k \geqslant 1)$ *astfel încît mulțimea* $B = \{p(a_i),\ o \leqslant i \leqslant n\}$ *să conțină* $k+1$ *puncte liniar independente și* $p\ [A^n] = co\ B$.

Demonstrație. Se arată ușor că dacă E^k este subspațiul generat de vectorii $a_i - a_0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, iar $b_i = p(a_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, atunci punctele b_i, $0 \leqslant i \leqslant k$, sînt liniar independente. În ceea ce privește egalitatea $p[A^n] = co\ B$, aceasta este imediată. Figura 2 ilustrează proprietatea din propoziția 2 pe cazul particular $m = n = 3$ și $k = 2$.

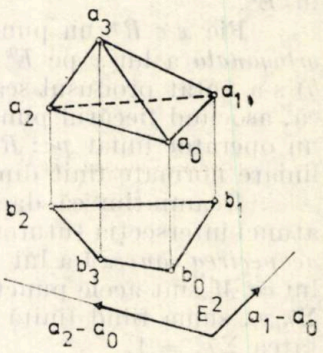


Fig. 2—Proiecția lui A^3 pe E^2.

Următoarea propoziție arată care sînt proiecțiile ortogonale pe E^k ale interiorului topologic și frontierei simplexului A^n din propoziția 1.

Propoziția 3. *Dacă Int M (fr M) este interiorul topologic (frontiera) lui M, atunci* $p[Int\ A^n] = Int\ co\ B$ *și* $p[fr\ A^n] = co\ B$.

Demonstrația nu este grea, dar ocupă mult spațiu, motiv pentru care este omisă. În principiu, ea se bazează pe compacitatea și convexitatea lui A^n, precum și pe continuitatea operatorului liniar p.

Ne vom opri acum asupra a două cazuri particulare. În acest scop, să fixăm pentru început $k = 2$. Din propoziția 1 deducem că $n+1$ puncte coplanare ($n \geqslant 3$) din care cel puțin trei nu sînt coliniare, reprezintă proiecțiile ortogonale ale vîrfurilor unui simplex n-dim pe planul considerat, iar acoperirea lor convexă este proiecția simplexului pe acest plan. Figura 3 ilustrează toate posibilitățile de proiecție ortogonală a unui simplex 4-dim($n = 4$) pe un plan; s-au figurat și proiecțiile muchiilor simplexului.

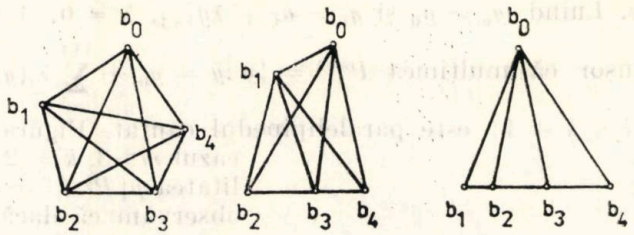


Fig. 3 — Proiecții pe plan ale simplexului 4-dim.

Să considerăm acum $k = 3$. Rezultă că $n + 1$ puncte din R^3 ($n \geqslant 4$) din care cel puțin patru sînt necoplanare, reprezintă proiecțiile ortogonale pe R^3 ale vîrfurilor unui simplex n-dim, iar acoperirea lor convexă este proiecția simplexului pe R^3. Figura 4 ilustrează proiecțiile posibile pe R^3 în cazul $n = 4$; în figura 4. a) oricare patru puncte sînt necoplanare, iar în figura 4. b) patru puncte, și anume b_1, b_2, b_3, b_4, sînt coplanare. În această figură am reprezentat punctat unele segmente pentru a arăta că este vorba despre mulțimi în spațiu. Figurile 3 și 4 pot fi considerate ca imagini 2-dim, respectiv 3-dim, ale simplexului 4-dim. Particularizarea celorlalte propoziții este evidentă.

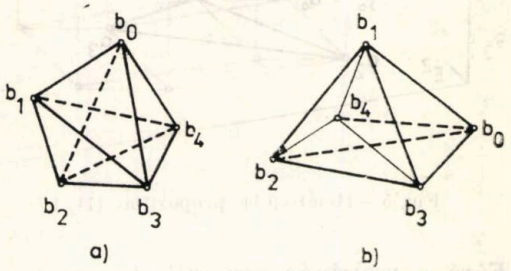


Fig. 4 — Proiecții pe R^3 ale simplexului 4-dim.

III. Paralelipipede finit dimensionale

În acest paragraf ne vom ocupa de proiecția ortogonală a paralelipipedelor finit dimensionale pe subspații cu un număr mai mic de dimensiuni. Vom păstra în continuare notațiile primului paragraf.

Să considerăm un simplex k-dim $A^k \subset E^k$ cu vîrfurile a_i, $1 \leqslant i \leqslant k + 1$. Dacă $a_0 \in E^k$ este un punct diferit de a_i, $1 \leqslant i \leqslant k + 1$, atunci vom nota cu $Q(a_0, A^k)$ mulțimea celor 2^{k+1} puncte x de forma $x = a_0 + \sum_{i \in I} (a_i - a_0)$, unde I parcurge mulțimea părților lui $\{1, 2, \ldots, k + 1\}$.

Se observă ușor că $Q(a_0, A^k) \subset E^k$.

Propoziția 1. *Fie $A^k \subset E^k$ un simplex k-dim și $a_0 \in E^k$ un punct diferit de vîrfurile lui A^k. Atunci există un paralelipiped $(k + 1)$-dim $P^{k+1} \subset R^m$ ($m \geqslant k + 1$) ale cărui vîrfuri se proiectează ortogonal pe E^k în punctele mulțimii $Q(a_0, A^k)$. In plus $p[P^{k+1}] = co\, Q(a_0, A^k)$.*

Demonstrație. Luînd $y_0 = a_0$ și $y_i = a_i + \lambda g_{k+1}$, $\lambda \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$ se verifică ușor că mulțimea $P^{k+1} = \{y : y = y_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (y_i - y_0),\ \lambda_i \in [0, 1],\ 1 \leqslant i \leqslant k+1\}$ este paralelipipedul căutat. Figura 5 ilustrează cazul $m \geqslant 3$, $k = 2$. Pentru egalitatea $p[P^{k+1}] = co\ Q(a_0, A^k)$ observăm că dacă $x \in p[P^{k+1}]$, atunci există $y \in P^{k+1}$, $y = y_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (y_i - y_0)$, astfel încît $x = p(y) = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i^* x_i$, unde

$$\lambda_i^* = \begin{cases} 1 - \lambda_{k+1}, & i = 0 \\ \lambda_i - \lambda_{i-1}, & 1 \leqslant i \leqslant k+1 \\ & \lambda_0 = 0 \end{cases}$$

și

$$x_i = \begin{cases} a_0 & , \ i = 0 \\ a_0 + \sum_{j=i}^{k+1} (a_j - a_0), \\ 1 \leqslant i \leqslant k+1. \end{cases}$$

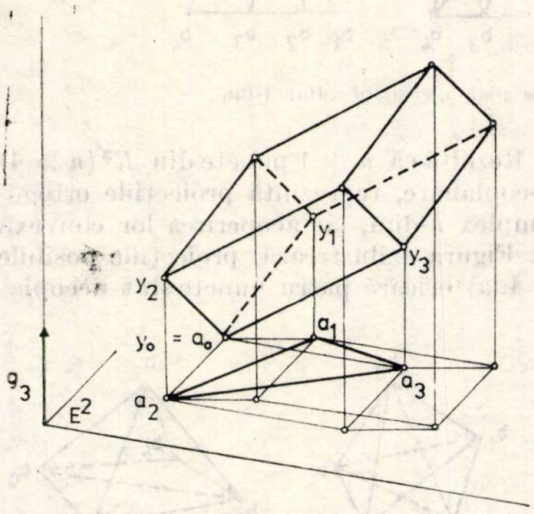


Fig. 5.—Relativă la propoziția III. 1.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant 1$, deci $\lambda_i^* \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant k+1$.
Pe de altă parte, este evident că $x_i \in Q(a_0, A^k)$, deci $x \in co\ Q(a_0, A^k)$. Cum $p[P^{k+1}]$ este convexă, propoziția este demonstrată.

Propoziția precedentă admite următoarea reciprocă:

Propoziția 2. *Dacă $P^{k+1} \subset R^m (m \geqslant k+1)$ este un paralelipiped $(k+1)$-dim, atunci există un subspațiu k-dim $E^k \subset R^m$ pe care vîrfurile lui P^{k+1} se proiectează ortogonal în punctele unei mulțimi $Q(a_0, A^k)$, unde $A^k \subset E^k$ este un simplex k-dim, iar $a_0 \in E^k$ un punct diferit de vîrfurile lui A^k.*

Nu insistăm asupra demonstrației deoarece nu prezintă dificultăți.

Propoziția de mai jos este similară propoziției 3 din paragraful precedent, fapt pentru care nu mai explicăm notațiile. Ea arată care sînt proiecțiile ortogonale pe E^k ale interiorului topologic și frontierei paralelipipedului P^{k+1} din propoziția III. 1.

Propoziția 3. *Avem $p[Int\ P^{k+1}] = Int\ co\ Q(a_0, A^k)$ și $p[fr\ P^{k+1}] = co\ Q(a_0, A^k)$.*

Demonstrația primei egalități se face pe baza compacității lui P^{k+1} și a continuității lui p. Cea de a doua rezultă din prima și din considerente elementare de topologie privind compacitatea și convexitatea lui P^{k+1}. Întrucît ar ocupa mult spațiu, omitem și aceste demonstrații.

Vom particulariza acum rezultatele la cazurile $m = 3$, $k = 2$ și $m = 4$, $k = 3$. În prima situație, simplexul A^2 este triunghiul $a_1 a_2 a_3$ (fig. 6).

Conform propoziției III. 1, construim vectorii $\sum_{i \in I} \overrightarrow{a_0 a_i}$ unde I parcurge mulțimea părților nevide ale lui $\{1, 2, 3\}$, obținînd punctele a_I (în figură nu s-au mai pus elementele lui I între acolade. Aceste puncte, împreună, cu a_0, formează mulțimea $Q(a_0, A^2)$ a cărei acoperire convexă este domeniul hexagonal $a_0 a_2 a_{23} a_{123} a_{13} a_1$ împreună cu frontiera sa. Se vede foarte ușor proiecția lui P^3 pe planul lui A^2, și faptul că aceasta poate fi considerată drept imagine 2-dim a paralelipipedului P^3.

În cazul $m = 4$, $k = 3$, simplexul A^3 este tetraedrul $a_1 a_2 a_3 a_4$ (fig. 7). Construim și aici vectorii $\sum_{i \in I} \overrightarrow{a_0 a_i}$, I parcurgînd părțile nevide ale lui $\{1, 2, 3, 4\}$, obținînd punctele a_I (aceeași convenție de notare a indicilor ca și în fig. 6), care, împreună cu a_0, formează mulțimea $Q(a_0, A^3)$. Acoperirea convexă a lui $Q(a_0, A^3)$ este corpul $a_0 a_1 a_{12} a_2 a_3 a_{13} a_{23} a_{14} a_{124} a_{24} a_{34} a_{134}$ $a_{1234} a_{234}$, ilustrat separat în figura 8. El este proiecția paralelipipedului P^4 pe spațiul R^3 și totodată imaginea 3-dim a lui P^4. Pentru a obține imaginea 2-dim a lui P^4, nu ne rămîne decît să proiectăm pe plan corpul din figura 8, rezultînd figura 9.

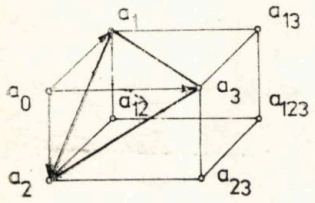


Fig. 6—Construirea proiecției lui P^3 pe plan.

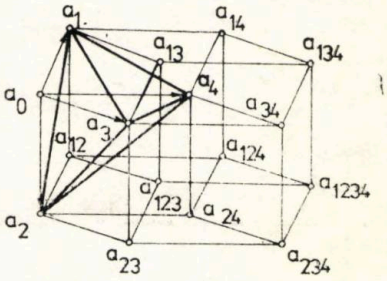


Fig. 7 —Construirea proiecției lui P^4 pe R^3.

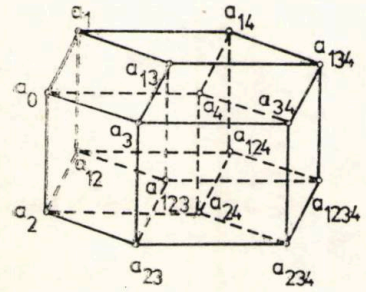


Fig. 8—Proiecția 3-dim a lui P^4

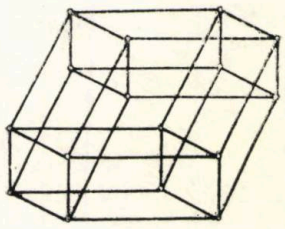


Fig. 9—Proiecția 2-dim a lui P^4

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Cristescu*, Analiză Funcţională, E. D. P., Bucureşti 1979.
2. *G. Gussi*, Itinerar în Analiza Matematică, Edit. Albatros, Bucureşti 1970.
3. *L. S., Potriaghin*, Introducere în Topologia Combinatorie, Academia R. P. R., Institutul de Studii Romăno — Sovietic.

On Finite Dimensional Simplexes

The paper generalizes in R^m well- known properties concerning orthogonal projection of tetrahedrons and parallelepipedons. The established results allow the 2-dim and 3-dim visualization of 4-dim simplex and parallelipipedon.

C.Z.: 517.56

FUNCȚII MONOGENE PE ALGEBRE NECOMUTATIVE
1. FUNCȚII REGULATE PE O ALGEBRĂ DE ORDINUL 4

M. N. ROȘCULEȚ, P. COCÂRLAN*

Se definesc funcții cu valori în algebra A_4 de elemente ale bazei 1, i, j, k cu legile de înmulțire date de (1), care satisfac condițiile de regularitate (3). În continuare se definesc condițiile de σ-cuasi monogeneitate (10) și stabilește formula integrală (11).

Să considerăm algebra A construită pe R de elemente ale bazei 1, i, j, k și legile de înmulțire date de

(1)

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

un număr din algebră se scrie

$$\omega = a + ib + jc + kd,\ a,\ b,\ c,\ d \in R;$$

dacă

$$\tau = x + iy + jz + kt,$$

avem

$$\omega\tau = ax - by + cz + dt + i\,(ay + vx - c\,t + dz) +$$

(2)
$$+ j(az - bt + cx + dy) + k(at + bz - cy + dx)$$

* Prof. dr. doc; Lector dr., catedra Matematici

şi $\omega\tau \neq \tau\omega$,. Ecuaţia $\omega\tau = 1$, conduce la sistemul

$$\begin{aligned} ax - by + cz + dt &= 1 \\ bx + ay + dz - ct &= 0 \\ cx + dy + az - bt &= 0 \\ dx + cy + bz + at &= 0 \end{aligned} \tag{2'}$$

în care dacă luăm pe x, y, z, t, necunoscute, determinantul sistemului (2')

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & d & -c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

încît obţinem pentru ecuaţia $\omega\tau = 1$, inversul la dreapta al lui ω dat de

$$\tau = \omega_d^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}(a - ib - jc - kd),$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \neq 0,$$

Dacă socotim pe τ dat, necunoscutele a, b, c, d, în ecuaţia $\omega\tau = 1$, verifică un sistem liniar de determinant :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x & -y & z & t \\ y & x & -t & z \\ z & -t & x & y \\ t & z & -y & x \end{vmatrix} = (x^2 + y^2 - z^2 - t^2)^2$$

deci inversul la stînga al unui număr din algebra A_4 există în aceleaşi condiţii.

Teorema 1. Algebra A_4 are divizori ai lui zero. Suportul geometric al divizorilor lui zero este definit de ecuaţia

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2$$

2. Vom spune că o funcţie (P, Q, R, S) cu valori în algebra A_4 $(P, \theta, R, S) = P(x, y, z, t) + iQ(x, y, z, t) + jR(x, y, z, t) + kS(x, y, z, t)$,

de clasa $C^{(1)}$ în $D \subset R^4$, deci P, Q, R, $S \in C^{(1)}$ în D, este regulată în D, dacă :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)(P + iQ + jR + kS) = 0 \tag{3}$$

în D. Să observăm că ([1], pag. 2), regularitatea definită astfel coincide cu monogeneitatea pentru funcţiile de o variabilă complexă.

Teorema 2. Componentele P, Q, R, S ale unei funcţii regulate în D satisfac sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale :

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

Demonstraţie. Rezultă din (3) deoarece 1, i, j, k formează o bază în algebră.

Teorema 3. Componentele P, Q, R, S ale unei funcţii de clasă $C^{(2)}$, regulate în D sînt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale de tip ultrahiperbolic

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Demonstraţie. Dacă în (4) derivăm prima ecuaţie în raport cu x, doua în raport cu y, a treia în raport cu z şi a patra în raport cu t, apoi scădem ultimele două ecuaţii din primele două adunate, rezultă :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

în mod asemănător obţinem şi pentru componentele Q, R, S. q.e.d.

3. Să considerăm acum forma exterioară de ordinul trei, cu coeficienţi în algebra A_4.

$$\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \alpha i\ \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t + \tag{6}$$

$$+ \beta j\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \gamma k\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t,$$

cu α, β, γ constante reale. Să anulăm produsul exterior

$$d(P, Q, R, S) \wedge \sigma = 0 \tag{7}$$

Avem

$$(dP + i dQ + j dR + k dS) \wedge \sigma = 0$$

care conduce la:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial x} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial y} + \beta \frac{\partial R}{\partial z} - \gamma \frac{\partial S}{\partial t} = 0,\\
&-\alpha \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \beta \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma \frac{\partial R}{\partial t} = 0,\\
&\beta \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial x} + \gamma \frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha \frac{\partial S}{\partial y} = 0,\\
&-\gamma \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \beta \frac{\partial Q}{\partial z} + \alpha \frac{\partial R}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Teorema 4. Funcţiile P, Q, R, S, de clasă $C^{(2)}$ în D, soluţii ale sistemului (8), verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y} - \beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

Demonstraţie. Se aplică operatorii $\frac{\partial}{\partial x}, -\alpha \frac{\partial}{\partial y}, -\beta \frac{\partial}{\partial z}, -\gamma \frac{\partial}{\partial t}$, la cele patru ecuaţii din (8), în ordinea scrisă şi se adună; se obţine pentru P ecuaţia (9) ş.am.d.; q.e.d.

Observaţie. Nu există un sistem de numere reale α, β, γ astfel încît sistemul (8) să coincidă cu (4).

4. În ([2], pag. 251), am numit funcţiile (P, Q, R, S) care satisfac condiţia (7) funcţii σ-cvasimonogene în D.

Să observăm însă că avem şi

$$d[(P, Q, R, S) \wedge \sigma] = 0 \tag{10}$$

deoarece

$$d[(P, Q, R, S) \wedge \sigma] = (dP, dQ, dR, dS) \wedge \sigma + (P, Q, R, S) \wedge d\sigma = 0,$$

întrucît $d\sigma = 0$, α, β, γ fiind constante, deci $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, prin urmare $[P, Q, R, S]$ este şi σ-monogenă în D([2] pag. 261). Relaţia (10) conduce imediat la

Teorema 5. Pentru orice varietate $S^* \subset R^4$, de dimensiune trei regulată, căreia i se pot aplica formulele stokesiene are loc relaţia integrală :

$$\iiint_{S^*} (P, Q, R, S) = 0 \tag{11}$$

dacă (P, Q, R, S) este σ-monogenă în D şi $S^* \subset D$.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. Lounesto*, Spinor valued regular functions in hypercomplex analysis : Helsinki University of Tehnology, Finland.
2. *M. N. Roşculeţ*, Funcţii monogene pe algebre comutative, Editura Ac. RSR, 1975.

Fonctions monogènes sur des algèbres non commutatives
Fonctions régulières sur une algèbre d'ordre 4

On définit des fonctions avec les valeurs dans l'algèbre A_4, aux éléments de la base 1, i, j, k avec les lois de multiplication donnés par (1), qui satifont les conditions de régularité (3). A la suite, on définit les conditions de σ-quasi-monogénéité (10) et on établit la formule intégrale (11).

C.Z.: 519. 216
519. 246

ASUPRA UNUI MODEL STOCASTIC DISCRET CU MATRICE DE TRECERE PERTURBATĂ

S. CORBU*

Lucrarea de față se ocupă de un model liniar discret de forma $p_{n+1} = p_0 \cdot P_n$ $n \geqslant 0$, unde p_0 și p_{n+1} sînt vectori stocastici, iar P_n matrice stocastică, ce suferă la fiecare moment o perturbare în jurul unei valori medii ($P_n = P + \Delta_n$, P matrice stocastică dată). Se calculează pentru aceste procese momentele de ordinul 1 și 2 ale vectorului de stare p_n. Lucrarea se ocupă atît de procese cu o singură clasă ergodică, cît și de procese cu stări absorbante.

Fie un șir de matrici stocastice independente $P_1, P_2, \ldots$ de dimensiune $r \times r$. Presupunem că **fiecare matrice P_n, $n \geqslant 1$ este o variabilă aleatoare cu valori în mulțimea matricilor nesingulare** $r \times r$, identic repartizată. În acest caz matricea P_n se poate scrie

$$P_n = P + \Delta_n \tag{1}$$

unde P este o matrice stocastică, iar Δ_n **matrice aleatoare de medie zero și dispersie dată** $\sum$, independentă de $n \cdot E(\Delta_n) = 0$, $var(\Delta_n) = \sum$. Un astfel de șir de matrici poate proveni de exemplu dintr-o selecție asupra unui lanț Markov. La fiecare moment n în urma selecției asupra lanțului obținem o estimație P_n a matricii de trecere P. Dacă procesul este omogen, atunci estimația matricii P nu depinde de momentul n. Se vede că matricea Δ_n nu are nici o interpretare probabilistică, ci una pur statistică. Presupunem că elementele $\delta_{ij}^{(n)}$ ale matricii Δ_n (indicele superior desemnează rangul n al selecției) îndeplinesc condițiile :

$$E(\delta_{ij}^{(n)}) = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij}^{(n)} = 0, \quad Pr(|\delta_{ij}^{(n)}| > p_{ij}) = 0$$

unde p_{ij} sînt elementele matricii P.

Fie cîmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathscr{H}, P\}$ și p_0 un vector inițial de probabilitate de dimensiune r. **Șirul $(P_n)_{n \geqslant 1}$ și vectorul p_0 definesc pe $\{\Omega, \mathscr{H}, P\}$ un lanț Markov neomogen** $(X_n)_{n \geqslant 1}$ ($P_0 = I$ matricea unitate) pe mulțimea stărilor $\{1, 2, \ldots, r\}$. Se cunoaște că vectorul probabilităților de stare la momentul $n + 1$ este dat de relația

$$p_{n+1} = p_0 P_1 P_2 \ldots P_n \tag{2}$$

* Asist. catedra Matematici I

sau

$$p_{n+1} = p_0(P + \Delta_1)(P + \Delta_2)(P + \Delta_3) \ldots (P + \Delta_n)$$

Se vede că dacă $\Delta_i = 0$ pentru orice $i \geqslant 0$, atunci avem un lanț Markov omogen de matrice de trecere P. Pentru $\Delta_i \neq 0$ avem un proces Markov în care, la fiecare moment are loc o perturbare a matricii de trecere în jurul unei valori medii P. Dacă scriem relația (1) astfel

$$p_{n+1} = p_n(P + \Delta_n) = p_n P + p_n \Delta_n \tag{3}$$

și notăm $p_n \Delta_n = \varepsilon_n$ vom avea

$$p_{n+1} = p_n \cdot P + \varepsilon_n \tag{4}$$

Dacă presupunem că vectorii ε_n sînt independenți între ei ajungem un model asemănător celui studiat de Sykes (1969) pentru studiul populațiilor, în care matricea P nu este stocastică ci o matrice „demografică". Prezentăm pe scurt calcularea momentelor de ordinul 1 și 2 ale vectorilor $p_n, n \geqslant 0$. Avem $E(\varepsilon_n) = 0, n \geqslant 0$, și dacă notăm cu Γ_{ij} matricea covarianțelor vectorilor ε_i și ε_j avem

$$E(\varepsilon_i' \cdot \varepsilon_j) = \Gamma_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

unde x' înseamnă transpusul vectorului linie x.

Avem deci o familie de matrici de covarianță. Dacă iterăm formula (4) avem

$$p_{n+1} = p_0 \cdot P^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_{n-i} \cdot P^i \tag{5}$$

Aplicăm în (5) operatorul valoare medie și avem

$$E(p_{n+1}) = \mu_{n+1} = p_0 \cdot P^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} E(\varepsilon_{n-i}) \cdot P^i = p_0 \cdot P^{n+1}$$

Deci media vectorului de stare la momentul $n + 1$ este produsul vectorului inițial p_0 cu P^{n+1}. Să calculăm covarianța dintre vectorii p_m și p_n.

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(p_m, p_n) &= E[(p_m - \mu_m)'(p_n - \mu_n)] \\ &= E[(\sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_{m-i-1} P^i)'(\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{n-j-1} P^j)] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} P'^i \Gamma_{m-i-1, n-j-1} P^j \end{aligned}$$

Dacă înlocuim p_m cu p_n *obținem dispersia*

$$var(p_n) = cov(p_n, p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} P'^i \cdot \Gamma_{n-i-1,\, n-j-1} \cdot P^j \tag{6}$$

Dacă $\Gamma_{ij} = \delta_{ij} \cdot \Gamma$, cu $\delta_{ij} = 1$ dacă $i = j$ și 0 dacă $i \neq j$ iar Γ este o matrice patratică $r \times r$ avem

$$\text{var}(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} A'^i \, \Gamma A^i$$

un element γ_{ij} al matricii Γ reprezintă covarianța dintre elementul i al vectorului ε_n și elementul j al aceluiași vector, $\gamma_{ij} = \text{cov}(\varepsilon_n(i), \varepsilon_n(j))$. Dacă corelația în timp a vectorilor ε_n este staționară, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{i-j}$, $\text{var}(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} P'^i \Gamma_{i-j} P^j$, $(\Gamma_{i-j} = \Gamma_{j-i})$.
Dacă corelația este exponențială și staționară, $\Gamma_{i-j} = \rho^{|i-j|} \cdot \Gamma$, $0 < \rho < 1$ sau $\Gamma_{i-j} = e^{-\rho|i-j|} \cdot \Gamma$, $\rho < 0$.
Dacă $(\varepsilon_n)_{n>0}$ sînt repartizate normal și necorelate de matrice de covarianță Γ atunci

$$p_n \approx N(p_0 P^n, \sum_{i=0}^{n-1} P'^i \, \Gamma P^i).$$

Dacă Γ este nesingulară se cunoaște [1] că variabila

$$Q_n = (p_n - p_0 P^n)(\sum_{i=0}^{n-1} P'^i \Gamma P^i)^{-1}(p_n - p_0 P^n)'$$

este repartizată χ^2_r.

Se observă că în expresia dispersiei vectorului p_n (6) dacă trecem la limită după n, seria din membrul drept va fi divergentă, deoarece $P^n \to \Pi$ cînd $n \to \infty$ iar Π este o matrice pozitivă stabilă (matricea limită a matricii stocastice P), deci termenul general al seriei tinde către $\Pi\Gamma\Pi' \neq 0$. Vom demonstra acum pe scurt că $1/n^2$ din dispersia lui p_n există și este finită, dacă Γ_{ij} are elementele finite. Pentru simplificarea scrierii să notăm $\Gamma_{n-i-1,\, n-j-1} = \Gamma_{(i)(j)}$. Se demonstrează că matricea produs $P'^i \Gamma_{(i)(j)} P^j$ are la limită cînd $i, j \to \infty$ liniile proporționale (Hajnal 1976), mai mult, pentru un element al matricii produs $a_{kl}^{(i+j+1)}$ avem :

$$1/(i + j + 1) \cdot \log a_{kl}^{(i+j+1)} \to h_l$$

cînd $i, j \to \infty$ și limita este independentă de k.

Deci pentru i, j mari $a_{kl}^{(i+j+1)}$ este aproximativ egal cu b^{3h_l} (b^{3h_l}) unde b este baza logaritmului, deoarece $P'^i \simeq \Pi'$ și $P^j \simeq \Pi$ și cu cît i, j cresc P'^i, P^j tind către o singură matrice Π', respectiv Π. Avem deci pe componente

$$\left\{ \frac{1}{n^2} P'^i \, \Gamma(i)(j) \, P^j \right\}_{k,l} \simeq \left\{ \frac{b^{3k_l}}{n^2} \right\}_{k,l}$$

și cînd $n \to \infty$ matricea din dreapta tinde către 0.

Dacă $\Gamma_{ij} = \Gamma$ pentru orice i și j și Γ este simetrică avem de asemenea

$$\frac{1}{n^2} \text{var}(p_n) = (1/n \sum_{i=0}^{n-1} P'^i) \Gamma (1/n \sum_{j=0}^{n-1} P^j) \to$$

$$\to \Pi\Gamma\Pi' = (\sum_{i,j=1}^{r} \pi_i \pi_j \gamma_{ij}) \cdot E, \text{ unde}$$

E este matricea $r \times r$ cu toate elementele 1. Se cunoaște că

$$\lim_{n\to\infty} 1/n(I + P + \ldots + P^{n-1}) = \Pi$$

iar $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ este vectorul limită al matricii P(Iosifescu 1977).
Cazul cînd ε_n nu sînt independenți.

Fie $(P_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de matrici stocastice cu $P_n = P + \Delta_n$ definite ca mai sus. Să notăm $E(\delta_{ij}^{(n)} \cdot \delta_{kl}^{(n)}) = \Sigma$, Σ fiind o matrice singulară de dimensiune $r^2 \times r^2$. Matricea Σ conține covariațele dintre fiecare element al matricii Δ_n cu fiecare alt element al său.
Considerăm media condiționată

$$E(p_{n+1}/p_n) = E[p_n(P + \Delta_n)/p_n]$$

$$= p_n P + p_n E(\Delta_n | p_n)$$

Dar Δ_n sînt independente și $E(\Delta_n/p_n) = E(\Delta_n) = 0$
Deci $E(p_{n+1}/p_n) = p_n \cdot P$. Pentru dispersie avem

$$\operatorname{var}(p_{n+1}/p) = E[p_n \Delta_n \cdot (p_n \Delta_n)'/p_n]$$

$$= E[\{\sum_\alpha \sum_\beta \delta_{i\alpha}^{(n)} \delta_{j\beta}^{(n)} p_n(\alpha) p_n(\beta)\}/p_n]$$

$$\operatorname{var}(p_{n+1}/p_n) = \{\sum_\alpha \sum_\beta \operatorname{cov}(\delta_{i\alpha}^{(n)} \delta_{j\beta}^{(n)}) p_n(\alpha) p_n(\beta)\}$$

între acolade avem delimitate elementele i, j ale unei matrici.
Ținînd cont de formulele

$$E(A) = E(E(A|B))$$

$$\operatorname{var}(A) = E(\operatorname{var}(A|B)) + \operatorname{var}(E(A|B))$$

avem :

$$\operatorname{var}(p_{n+1}) = E(\operatorname{var}(p_{n+1}|p_n)) + \operatorname{var}(E(p_{n+1}|p_n))$$

$$= \{\sum_\alpha \sum_\beta \operatorname{cov}(\delta_{i\alpha}^{(n)}, \delta_{j\beta}^{(n)}) E(p_n(\alpha) \cdot p_n(\beta))\} + \operatorname{var}(p_n \cdot P)$$

$$= \{\sum_\alpha \sum_\beta \operatorname{cov}(\delta_{i\alpha}^{(n)}, \delta_{j\beta}^{(n)}) \operatorname{cov}(p_n(\alpha), p_n(\beta)) +$$

$$+ E(p_n(\alpha)) \cdot E(p_n(\beta))\} + P' V_n P$$

unde am notat $V_n = \operatorname{var}(p_n)$.
Dacă notăm C_n matricea cu elementele

$$\{C_{ij}^{(n)}\} = \{\sum_\alpha \sum_\beta \operatorname{cov}(\delta_{i\alpha}^{(n)}, \delta_{j\beta}^{(n)})[\operatorname{cov}(p_n(\alpha), p_n(\beta)) +$$

$$+ E(p_n(\alpha)) \cdot E(p_n(\beta))]\}$$

avem :

$$V_n = C_{n-1} + P' V_{n-1} P$$

Dacă iterăm după n avem

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} P'^{(n-i-1)} C_i P^{(n-i-1)}$$

formulă care ne dă dispersia vectorului de stare p_n.

Lanțuri absorbante neomogene

Fie un șir de matrici de forma

$$P_n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_n & T_n \end{pmatrix}$$

unde I este matrice unitate de dimensiune $k \times k$, 0 matricea nulă de dimensiune $k \times r$, $(R_n : T_n)$ matrice stocastică de dimensiune $r - k \times r$. Observăm că P_n este o matrice stocastică cu k stări absorbante și $r - k$ stări tranziente. Dacă $(R_n : T_n) = (R : T) + (\Delta_r^{(n)} : \Delta_t^{(n)})$ cu proprietatea $\sum_{j=1}^{r} (\delta_{rij}^{(n)} + \delta_{tij}^{(n)}) = 0$, $i = k+1, k+2, \ldots, r$, $E(\Delta_r^{(n)}) = 0$, $E(\Delta_t^{(n)}) = 0$.

Stările $\{1, 2, \ldots, k\}$ sînt stări absorbante, iar stările $\{k+1, \ldots, r\}$ stări tranziente. Dacă p_0 este un vector de probabilitate inițial atunci

$$p_n = p_0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_1 & T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_2 & T_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_n & T_n \end{pmatrix}$$

$$p_n = p_0 \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ R_1 + R_2 T_1 + R_3 T_1 \cdot T_2 + \ldots + R_n T_1 T_2 \ldots T_{n-1} & T_1 T_2 \ldots T_n \end{pmatrix}$$

$$p_n = p \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} R_i T_1 T_2 \ldots T_{i-1} & T_1 T_2 \ldots T_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Formula (8) ne dă vectorul probabilităților de stare la momentul n pentru lanțul Markov neomogen definit de vectorul inițial p_0 și de șirul de matrici de forma (8). Dacă notăm cu $\nu(j)$ variabila aleatoare care ne dă numărul de apariții a stării tranziente j înaintea absorbției, vom avea matricea fundamentală

$$N = \{E_i(\nu(j))\} = I + T_1 + T_1 T_2 + T_1 T_2 T_3 + \ldots$$

i, j fiind stări tranziente. Am folosit $E_i(\cdot)$ pentru a desemna valoarea medie a unei variabile, dacă procesul pornește din starea i (Iosifescu 1977) Se observă că $E(N) = I + E(T_1) + E(T_1)E(T_2) + \ldots + E(N) = I + T + T^2 + \ldots = (I - T)^{-1}$ și obținem matricea fundamentală a lanțului absorbant de matrice $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & T \end{pmatrix}$, (Iosifescu 1977) unde

$$R = E(R_n),\ T = E(\mathrm{T}_n),\ n \geqslant 1.$$

Matricea N este o variabilă aleatoare ale cărei elemente reprezintă timpul mediu de absorbție pentru o stare tranzientă. În general se pot obține toate rezultatele clasice privitoare la lanțurile Markov absorbante.

Cazul lanțului cu o singură clasă ergodică

Dacă matricile P_n sînt indecompozabile (Iosifescu 1977) și avem ca mai sus $P_n = P + \Delta_n$, atunci produsul $P_1P_2 \dots P_n = (P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots$ $\dots (P + \Delta_n)$ este un produs aleator de matrici care tinde către o matrice stocastică Π_n cu liniile identice (produsul este slab ergodic)(Iosifescu 1977, Hajnal, 1976). Acest lanț neomogen poate fi privit în „medie" ca lanț omogen. Să definim în analogie cu lanțurile omogene ergodice, matricea

$$Z + I = \sum_{n \geqslant 1} (P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n) - \Pi] \tag{10}$$

unde $\Pi = \lim_{n \to \infty} P^n$. Matricea Z joacă rolul matricii fundamentale din teoria lanțurilor Markov ergodice. Se vede ușor că $E(Z) = (I - (P - \Pi))^{-1}$

Propoziție. Dacă Z este definită de (10) atunci

1) $P \cdot Z = Z \cdot P$
2) $Z \cdot e = e$
3) $E(\pi' \cdot Z) = E(\pi')$
4) $I - Z = \Pi - P \cdot Z$

unde $e' = (1, 1, 1, \dots, 1)$, π este vectorul limită corespunzător matricii P. Enunțul propoziției este identic cu al propoziției de la lanțurile ergodice (Iosifescu 1977), cu excepția punctului 3) în care proprietatea are loc în medie. Demonstrația de asemenea urmează în general pe cea din monografia [2], pag. 143.

1) $P \cdot Z = P + \sum_{n \geqslant 1} [P(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n) - P\Pi] =$

$$= P + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_0)(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n) - \Pi] =$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} [(P + \Delta_0)(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n) - \Pi] + \Pi = Z + \Pi$$

unde Δ_0 este o matrice cu elementele nule,

$$Z \cdot P = P + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n)P - \Pi P] =$$

$$= P + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n)(P + \Delta_0) - \Pi] =$$

$$= P + \Delta_0 - \Pi + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n)(P + \Delta_0) - \Pi] + \Pi =$$

$$= Z + \Pi, \text{ deci } Z \cdot P = P \cdot Z$$

2) $Z \cdot e = I \cdot e + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n)e - \Pi \cdot e] =$

$= e + \sum_{n \geqslant 2} [(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_{n-1})\, e - e] = \dots$

$= e + [(P + \Delta_1)e - e] = e.$

3) Evidentă

4) Înmulţim egalitatea (10) la stînga cu $I - P$ şi avem :

$$(I - P)Z = I - P + \sum_{n \geqslant 1} [(I - P)(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) + \dots + (P + \Delta_n) -$$

$$- (I - P)\Pi]$$

$$Z - PZ = I - P + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n) -$$

$$- P(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n) - \Pi + \Pi]$$

$$Z - PZ = I - P + \sum_{n \geqslant 1} [(P + \Delta_1)(P + \Delta_2) \dots (P + \Delta_n) - \Pi]$$

$$- \sum_{n \geqslant 1} [P(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n) - \Pi] =$$

$$= I - P + Z - \sum_{n \geqslant 0} [(P + \Delta_0)(P + \Delta_1) \dots (P + \Delta_n) - \Pi] + P - \Pi$$

$$Z - PZ = I + Z - Z - \Pi$$

Deci $Z - PZ = I - \Pi$ adică egalitatea 4). Cu ajutorul matricii Z putem regăsi rezultatele privitoare la momentul primei intrări în diverse stări ale lanţului cît şi probleme aferente [3], [4].

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Ciucu, V. Craiu*, Inferenţă statistică. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974
2. *J. Hajnal*, On products of non-negative matrices, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1976), 79, 521
3. *M. Iosifescu*, Lanţuri Markov finite şi aplicaţii. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977
4. *J. Kemeny, L. Snell*, Finite Markov chains, D. van Nostrand Company, INC. 1960
5. *Kai Lai Chung*, Markov chains with stationary transition probabilities, Springer-Verlag Berlin, 1967
6. *Z. Sykes*, Some stochastic version of the matrix model for population dynamics. Amer. St. Assoc. J., march 1969

On a Discrete Stochastic Model with a Perturbated Passage Matrix

In this work we consider a discrete stochastic model $p_{n+1} = p_0 \cdot P_n$, $n > 0$ where p_{n+1}, p_n are r-dimensional stochastic vectors, and P_n a stochastic matrix suffering a perturbation at any moment n, $P_n = P + \Delta_n$, where Δ_n is a perturbation matrix with zero mean ($E(\Delta_n) = 0$, $n \geqslant 0$). The statistics of p_n is obtained for models with an ergodic class or an absorbing state.

C.Z.: 535; 621.373.8

STUDIU TEORETIC ASUPRA LASERULUI IN REGIM MODE-LOCKING CU MODULATOR ELECTROOPTIC IN CAVITATE CUPLATĂ

I. M. POPESCU, GH. A. PODOLEANU*

Reprezentînd cîmpul optic sub forma suprapunerii de moduri normale sînt obținute ecuațiile modurilor cuplate atît în cazul utilizării unui modulator de pierderi cît și de fază plasat într-o calitate auxiliară cuplată la cea laser.

I. Introducere

Perturbarea cavității cuplate și nu a cavității laser pentru a obține regimul de mode-locking, prezintă avantajul de a asigura separarea cel puțin în parte a reglajelor condițiilor optime de oscilație (efectuate asupra cavității laser) de reglajele condițiilor optime de mode-locking (efectuate asupra cavității cuplate).

Modelul teoretic prezentat în lucrare evidențiază fenomenele fizice care duc la cuplarea modurilor laser în cazul utilizării unui modulator electrooptic de pierderi sau de fază plasat în cavitate cuplată. Folosind reprezentarea cîmpului electromagnetic în cavitatea laser sub forma suprapunerii de moduri normale, efectul cavității pasive este luat în considerație prin coeficientul de reflexie efectiv „văzut" dinspre cavitatea activă spre cea pasivă, obținîndu-se astfel ecuațiile modurilor cuplate.

II. Prezentarea modelului teoretic general

În scopul analizei teoretice care urmează, se fac următoarele ipoteze simplificatoare:

— cîmpul electromagnetic în cavitatea laser este de tipul TEM_{oon};

— se neglijează efectele de dispersie ale mediului activ;

— se neglijează efectul zgomotului cuantic asupra diferitelor moduri;

— în cavitatea laser oscilează $2N + 1$ moduri;

— se aproximează forma Doppler a profilului liniei laser cu o formă dreptunghiulară;

Conform teoriei generale [1—4], amplitudinea modului e_n satisface ecuația diferențială;

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 e_n}{\partial t^2} + \frac{\omega_n}{c^2 Q_n}\frac{\partial e_n}{\partial t} + k_n e_n^2 = -k_n \int_S (\bar{n} \times \bar{E})\,\bar{H}_n \mathrm{d}S \qquad (1)$$

---

* Prof. dr. ing.; Asist. dr. ing., catedra Fizică

unde Q_n este factorul de calitate al mediului activ, iar :

$$-k_n\int_S(\bar{n}\times\bar{E})\bar{H}_n\,\mathrm{d}S=-\left(\frac{k_n}{c}\right)\sum_q\frac{1-\Gamma_q}{1+\Gamma_q}(k_q)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial e_q}{\partial t}+\frac{\sigma e_q}{\varepsilon}\right)\int_S\bar{H}_n\bar{H}_q\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

În aceste ecuații μ_0, ε și σ sînt respectiv permeabilitatea, permitivitatea și conductivitatea volumică a mediului activ ; E reprezintă cîmpul electric, iar H_n cîmpul magnetic de mod normal ; Γ_q este coeficientul de reflexie al amplitudinii cîmpului la nivelul oglinzii de cuplaj dinspre cavitatea activă spre cea pasivă pentru modul q ; $\bar{n}$ este normala, iar k_n valoarea proprie a numărului de undă pentru modul n.

Reprezentarea cîmpului în cavitate în funcție de modurile normale va duce la o soluție a problemei studiate, valabilă doar în primă aproximație, laserul fiind descris în ecuațiile de mai sus ca un oscilator liniar.

Neglijarea dispersiei mediului activ permite considerarea frecvențelor modurilor echidistante, condiție exprimată prin relația :

$$k_n=\omega_n/c=(\omega_0+n\,\Omega)/c=(n_0+n)\pi/L_a \tag{3}$$

unde n_0 este un număr întreg fixat, iar n un număr întreg cuprins în intervalul $[-N,\ N]$. ω_0 este frecvența optică la centrul profilului cîștigului iar Ω ecartul dintre două moduri vecine.

Folosind expresiile funcțiilor proprii normalizate H_n în evaluarea membrului drept al relațiilor (2) și ținînd seama că :

$$\frac{\partial e_q}{\partial t}\sim\omega_q\,e_q\gg\frac{\sigma e_q}{\varepsilon} \tag{4}$$

ecuațiile diferențiale (1) devin :

$$\frac{\partial^2 e_n}{\partial t^2}+\frac{\omega_n}{\partial_n}\frac{\partial e_n}{\partial t}+\omega_n^2 e_n=2(-1)^{n_0+n+1}\cdot\frac{\omega_n}{\pi}\cdot\sum_q(-1)^{n_0+q}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-\Gamma_q}{1+\Gamma_q}(q_0+q)^{-1}\cdot\frac{\partial e_q}{\partial t} \tag{5}$$

Considerînd oglinda de cuplaj de reflectivitate r și transmisie t retardarea de fază și transmisia dus-întors prin cavitatea pasivă φ_q și respectiv a, coeficientul de reflexie Γ are expresia [2, 4—6]

$$\Gamma_q=r+a^2t^2\frac{\exp\,(-i\varphi_q)}{1-ra^2\,\exp\,(-i\varphi_q)} \tag{6}$$

Se notează : $$f(\varphi_q)=\frac{1-\Gamma_q}{1+\Gamma_q} \tag{7}$$

Folosind (6), (7) devine:

$$f(\varphi_q) = \frac{1 - r - a^2(1 + r - 2r^2)\exp(-i\varphi_q)}{1 + r + a^2(1 - r - 2r^2)\exp(-i\varphi_q)} \tag{8}$$

Funcția $f(\varphi_q)$ poate fi adusă la forma:

$$f(\varphi_q) = \frac{A + B\exp(-i\varphi_q)}{1 - G\exp(-i\varphi_q)} \tag{9}$$

$$\text{unde } A = \frac{1 - r}{1 + r} \; ; \; B = -\frac{a^2(1 + r - 2r^2)}{1 + r} \tag{10}$$

și $G = -a^2(1 - 2r)$

II.1. Cazul modulației de pierderi

În acest caz, pentru amplitudini suficient de reduse ale tensiunii pe cristalul modulator față de tensiunea semiundă a acestuia $V_{\lambda/2}$, efectul modulatorului este de a introduce o modificare a pierderilor în cavitate de forma:

$$a^2 = a_0^2[1 + M\cos(\omega_m t + \theta_m)] \tag{11}$$

unde a_0 este o constantă iar gradul de modulație M are expresia

$$M = v/v_{\lambda/2} \tag{12}$$

Avînd în vedere valorile practice ale parametrilor r și a în (10), G se poate neglija, astfel încît $f(\varphi)$ devine:

$$A(\varphi) = A + B_0[1 + M\cos(\omega_m t + \theta_m)]\exp(-i\varphi) \tag{13}$$

unde s-a notat:

$$B_0 = -a_0^2\frac{1 + r - 2r^2}{1 + r} \tag{14}$$

Introducînd (13) în (5), se obține ecuația:

$$\frac{\partial^2 e_n}{\partial t^2} + \frac{\omega_n}{Q_n}\cdot\frac{\partial e_n}{\partial t} + \omega_n^2\cdot e_n = -(-1)^{n_0+n}\frac{2\omega_n}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\sum_q(-1)^{n_0+q}\frac{A + B_0\exp(-i\varphi_q)}{n_0 + q}\cdot\frac{\partial e_q}{\partial t} -$$

$$-2(-1)^{n_0+n}\frac{\omega_n}{\pi}MB_0\sum_q(-1)^{n_0+q}\frac{\cos(\omega_m t+\theta_m)}{n_0+q}\cdot\exp(-i\varphi_q)\frac{\partial e_q}{\partial t} \quad (15$$

Urmărind obținerea expresiilor temporale ale modurilor e_n, pentru simplificarea ecuațiilor se impune cavității pasive aceeași structură de moduri cu a cavității active, condiție exprimată prin relația :

$$2L_p = 2L_a = 2L$$

ceea ce implică :

$$\varphi_q = 2\frac{\omega_q}{c}L_p = 2\frac{\omega_0+q\Omega}{c}L_p = 2(n_0+q)\frac{\pi}{L_a}L_p = 2(n_0+q)\pi \quad (17$$

Produsul $\cos(\omega_m t+\theta_m)\cdot\frac{\partial e_q}{\partial t}$ din membrul drept al ecuației (15 conține suma și diferența frecvențelor componentelor care influențează modul n. Analog motivelor expuse în [4], există două cazuri distincte :

1. ω_m și ω_n nu sînt comensurabile, $\omega_m \neq \frac{m\pi c}{L}$.

În acest caz nu se obține cuplarea modurilor, ci doar modularea modului e_n cu frecvența ω_m.

2. $\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$, unde m este un număr întreg. (18

În acest caz, ținînd cont de modurile q care influențează modul n de valorile φ_q date de (17) și căutînd soluțiile ecuațiilor (15) sub forma

$$e_{n\pm km} = E_{n\pm km}\exp[i(\omega_n \pm k\omega_m)t] + \text{c.c.} \quad (19$$

se obține următorul set de ecuații de moduri cuplate :

$$E_{n+km} + X_{n+km}E_{n+(k-1)m} + X^*_{n+km}\cdot E_{n+(k+1)m} = 0 \quad (20.$$

$$E_{n-km} + X_{n-km}E_{n-(k+1)m} + X^*_{n-km}\cdot E_{n-(k-1)m} = 0 \quad (20.$$

$$X_{n\pm km} = (-1)^m\cdot MB_0\exp(i\theta_m)\frac{\pi^{-1}}{\frac{1}{Q_{n\pm km}}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{A+B_0}{n_0+n\pm km}} \quad (2$$

Presupunînd același factor de calitate pentru toate modurile și ținînd seama de valorile experimentale pentru A, B și n_0, (21) se poate exprima astfel

$$X_{n\pm km}\approx X_m = (-1)^m\frac{M}{\pi}B_0Q\exp(i\theta_m). \quad (2$$

Se observă că (20.a) este complex conjugata ecuației (20.b), dacă :

$$E_{n+km} = E^*_{n-km} \tag{23}$$

Ecuația (20. b) se rezolvă exprimînd amplitudinea modului E_{n-km} sub forma :

$$E_{n-km} = (X^*_m)^k \cdot g_k \tag{24}$$

Înlocuind (24) în (20. b) se obține o ecuație recursivă pentru amplitudinile g_k :

$$g_k + |X_m|^2 \, g_{k+1} + g_{k-1} = 0 \tag{25}$$

Punînd g_k sub forma [2, 4] :

$$g_k = b^k \tag{26}$$

din (25) se obține ecuația :

$$|X_m|^2 b^2 + b + 1 = 0 \tag{27}$$

Din cele două soluții ale ecuației (27) se alege cea care la $m \to 0$ rămîne finită și a cărei expresie este dată de :

$$b = -\frac{1}{2|X_m|^2}[1 - (1 - 4)|X_m|^2)]^{1/2} \tag{28}$$

Folosind (26) și (28), (24) devine :

$$E_{n-km} = E_0 \left\{ -\frac{1}{2X_m}[1 - (1 - 4|X|^2_m)^{1/2}] \right\}^k \tag{29}$$

Punînd condiția ca în regim de mode-locking toate modurile să aibă amplitudinile egale, din relația (29) se obține :

$$|X_m| = \frac{1}{2} \tag{30}$$

Care este de fapt o condiție pentru gradul M de modulație :

$$M = \frac{\pi}{2B_0Q} \tag{31}$$

Din (29) și (22) se obține :

$$E_{n-km} = E_0[(-1)^{m+1} \exp(i\theta_m)]^k \tag{32}$$

Folosind (32) se obține pentru intensitate, în cazul $M = 1$, expresia :

$$I = E_0 E_0^* \cdot \frac{\sin^2\left[\dfrac{\Omega t + \theta_m + 2\pi}{2}(2N+1)\right]}{\sin^2\left(\dfrac{(\Omega t + \theta_m + 2\pi}{2}\right)} \tag{33}$$

care reprezintă o succesiune de impulsuri de frecvență Ω, de valoare maximă ;

$$I_{\max} = (2N+1)^2 E_0 E_0^* \tag{34}$$

și având o durată la semiînălțime în ipoteza $N \gg 1$;

$$t_i = \frac{3}{\Omega N} \tag{35}$$

II.2. Cazul modulației de fază

Retardarea de fază dus întors prin cavitatea pasivă în ipoteza modulației de fază realizată cu un cristal KDP are expresia :

$$\varphi_q = -\frac{2\omega_q}{c}[L_p + (n'-1)L_c] + \frac{\omega_q}{c}(n')^3 \gamma_{63} U \sin\omega_m t = \varphi_{q0} + \varphi_q(t) \tag{36}$$

unde n', r_{63} și φ_c sînt respectiv indicele de refracție ordinar, parametru electrooptic și lungimea cristalului modulator.

Neglijînd G din aceleași considerente ca și în cazul modulației de pierderi în expresia (36) a funcției $f(\varphi)$, aceasta devine :

$$f(\varphi) = A + B[\exp(-i\varphi_q)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\exp(-ik\omega_m)\, t] \tag{37}$$

unde $J_k(\beta)$ sînt funcțiile Bessel de prima speță și ordin întreg și s-a notat

$$\beta = \frac{\omega_q}{c}(n')^3 r_{63} \quad v \approx = 2\pi \frac{v}{v_{\lambda/2}} \tag{38}$$

Introducînd (37) în (5) și folosind pentru modurile e_n expresii de forma :

$$e_n = E_n \exp\,(i\omega_n t) + \text{c.c.} \tag{39}$$

se obține o ecuație pentru fazele modurilor e_n :

$$\omega_n t = -\varphi_{q0} - k\omega_m t + \omega_q t \tag{40}$$

din care rezultă :

$$\omega_n = \omega_q - k\omega_m \qquad \text{și} \quad -\varphi_{q0} = 2p\pi \tag{41, 42}$$

Ecuația (41) pune în evidență modurile q care influențează modurile n, iar (42) reprezintă condiția de acord a cavității pasive. Impunînd cavității pasive aceeași structură de moduri cu a cavității active, condiție exprimată prin relația :

$$L_a = L_p + (n' - 1)L_c = L \tag{43}$$

rezultă :

$$\omega_q = \omega_0 + q\Omega = (n_0 + q)\frac{\pi}{L} \tag{44}$$

Folosind (3) și (44), (41), devine :

$$q = n + k\frac{\omega_m}{\Omega} \tag{45}$$

Deoarece q este întreg, valorile posibile ale frecvențeide modulație, sînt date de expresia :

$$\omega_m = m\Omega, \qquad m \text{ întreg} \tag{46}$$

Reținînd în sumele din membrul drept al ecuațiilor (43) termenii dați de (45), se obțin pentru amplitudinile modale următoarele ecuații :

$$\left[-\frac{1}{Q_n} + \frac{2}{\pi}(n_0 + n)^{-1} \cdot (A + BJ_0(\beta))\right] E_n =$$

$$= \frac{2B}{\pi\omega_n} \sum_{k\neq 0} (-1)^{k\cdot m} J_k(\beta)(n_0 + n + km)^{-1} \cdot E_{n+km} \cdot \omega_{n+km} \tag{47}$$

Considerînd independența factorului de calitate Q de indicele n al modului și aproximînd $n + km \ll n_0$, ecuațiile (47) se simplifică, devenind :

$$-\left[\frac{1}{Q} + \frac{2}{\pi}(A + BJ_0(\beta))\right] E_n =$$

$$= \frac{2B}{\pi\omega_n \cdot n_0} \sum_{k\neq 0} (-1)^{k\cdot m} J_k(\beta) E_{n+km}\ \omega_{n+km} \tag{48}$$

Aceste ecuații exprimă legătura dintre moduri impusă de modulația de fază din cavitatea pasivă.

Se observă [7] că apare un cuplaj al modurilor începînd de la valori foarte mici ale indicelui β. Pentru $\beta < 0{,}6$, amplitudinea modului n este influențată practic doar de modurile $n \pm m$. Cu creșterea tensiunii de excitație a cristalului modulator, deci a indicelui β, crește numărul de moduri cuplate prin ecuații de tipul (13).

Se observă de asemenea influența cuplajului dintre cele două cavități asupra valorii tensiunii de excitație pentru obținerea regimului de mode-locking, cu cît B este mai mare, β deci U putînd fi mai mic.

În cazul modulației de fază, sistemul ecuațiilor cuplate este mult mai complicat decît în cazul modulației de pierderi, o rezolvare riguroasă putînd fi realizată numai pe calculator. Nu este posibilă nici o tratare de semnal mic analoagă modulației de pierderi, pentru valori β mici, caz în care considerarea doar a termenilor de ordinul întîi nu duce la o soluție $\beta \neq 0$.

III. Concluzii

Regimul mode-locking folosind modulator în cavitatea laser este extensiv studiat în literatură. Deși sînt comunicate o serie de realizări experimentale de mode-locking folosind perturbarea cavității cuplate la cea laser, după cunoștința autorilor nu se cunosc studii teoretice în această direcție.

Materialul de față încearcă, folosind un model liniar,să surprindă fenomenele de cuplare ale modurilor în cazul utilizării atît a unui modulator de pierderi cît și de fază într-o cavitate cuplată la cea laser.

Rezultatele teoretice sînt în acord cu cele experimentale obținute de autori.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. H. Pantell, H. E. Puthoff*, „Fundamentals of Quantum Electronics", John Wiley & Sons Inc. (1969).
2. *E. I. Gordon, J. D. Rigden*, Bell Syst. Tech. J., 42, (1963), 155.
3. *A. Yariv*, J. Appl. Phys. vol. 36, Nr. 2, (1965), 388.
4. *M. di Domenico*, Jr., J. Appl. Phys., vol. 35, No. 10, (1964) 2870.
5. *A. Gh. Podoleanu*, Teza de doctorat, Institutul Politehnic București, 1984.
6. *A. Gh. Podoleanu, I. M. Popescu*, Rev. Roum. Phys., 30, No. 5, (1985), 381.
7. *I. M. Popescu, A. Gh. Podoleanu, P. E. Sterian*, în vol. „Trends in Quantum Electronics", Bucharest, sept. 1985, p. 64

Theoetical Study on the Mode-Locking Operation Using Electrooptic Modulator in Coupled Cavity

The coupled modes equations for a two cavity optical configuration are obtained in terms of the system normal modes. The studied optical configuration contain a loss or phase modulator placed inside an auxilliary passive cavity which is coupled to the active cavity.

C.Z.; 532. 517. 4 : 621. 59

PHYSICAL PROBLEMS IN THE DESIGN OF THE CRYOGENIC CABLES

IV. STUDY OF SEMIEMPIRICAL EXPRESSIONS OF THE DARCY FRICTION FACTOR FOR MONOPHASIC FLOWS IN ROUGH PIPES

V. IANCU, D. IORDACHE, TATIANA POP, LUMINIȚA DANIELLO, AGNETA RADO, E. SAVA*

General equations and different flow regimes are analysed in order to perform the necessity of using semiempirical relations. The agreement between the published expressions for the friction factor and the experimental data is investigated, the validity ranges and the error levels of each correlation being established. Certain hypotheses concerning the nature of the additional univocity parameters and similarity criteria, allowing to more accurate evaluations of the friction factor are examined, and the necessity of new experimental investigations concerning the turbulent flow in rough pipes is pointed out. The possibility of using specific relations for restricted material classes is also discussed. New semiempirical relations are proposed for different flow regimes.

1. Introduction

The design of the cryogenic cable requires [1, 2] the knowledge of the physical parameters describing the different cable components in various work regimes, as well as the relations between them. One of the most important parameters is the Darcy friction factor, defined by the expression [3]: $f = \frac{2\mathrm{d}}{\tilde{\rho} \cdot \tilde{v}^2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l}$, (1.1)

where $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l}$ is the linear density of the pressure drop on a pipe of hydraulic diameter $\mathrm{d} = \frac{4S}{P}$ (S being the cross-sectional flow area and P the „weted" perimeter), while $\tilde{\rho}$ and $\tilde{v}$ are the temporal (Newton) averages** of the fluid density and speed, respectively. The knowledge of the friction

---

* Assist.; Prof. Ph. D.; Assist.; Lect. Ph. D.; Polytech. Inst. Bucharest, Physics Deparement; Autom. Eng.; Autom. Eng.

** $\tilde{f}(\bar{r}, t) = \frac{1}{t_c} \int_{t}^{t+t_c} f(\bar{r}, t')\mathrm{d}t'$, t_c being a characteristic time of the process.

factor (Darcy) allows us to evaluate not only the pressure drop, but also the linear density of the dissipated power, due to internal frictions :

$$\dot{Q}'_f = \frac{\dot{M}}{\tilde{\rho}} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l}, \tag{1.2}$$

where $\dot{M}$ is the average mass flow rate.

The general flow equations being too intricate, the friction factor is usually evaluated by semiempirical relations. No complete analysis of these relations has been published up to now. The extant relations [3, 4] are not compared, and the obtained experimental data concerning the cryogenic fluids don't cover the working range. Finally, the univocity parameters used so far are not enough to conveniently describe the frictions in rough pipes.

The purpose of the present work is to make a theoretical study of these points. Section 2 analyses the general equations and flow regimes introducing the usual univocity parameters and similarity criteria ; Section 3 investigates the agreement between the published semiempirical relations and the experimental data, showing their validity ranges and error levels ; Section 4 deals with the possible improvements of the present formalism ; Section 5 summarizes some concluding remarks.

2. Present description of monophasic flows

2.1. *General equations*

The turbulent flow of compressible fluids is generally described by the flow equations :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho} \cdot \tilde{v}_j) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{\rho} \cdot \tilde{v}_j \, \tilde{v}_k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_j} \right) - \right.$$

$$\left. - \left[\tilde{p} + \left(\frac{2}{3} \eta - \zeta \right) \nabla \tilde{\vec{v}} \right] \delta_{jk} \right\} - \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{\delta\rho \cdot \delta v_j}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{\rho} \cdot \widetilde{\delta v_j \cdot \delta v_k} + \tilde{v}_k \widetilde{\delta\rho \cdot \delta v_j} + \tilde{v}_j \cdot \widetilde{\delta\rho \cdot \delta v_k}), \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

the continuity equation :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{\rho} \cdot \tilde{v}_j) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\widetilde{\delta\rho \cdot \delta v_k}) = 0, \tag{2.2}$$

and the correlation equation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho} \cdot \tilde{i}) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{\rho} \cdot \tilde{v}_k \cdot \tilde{i}) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{p} \cdot \tilde{v}_k) +$$

$$+\sum_{j,k}\eta\left(\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_j}\right)\frac{\mathrm{d}\tilde{v}_j}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\eta\,(\nabla\tilde{\vec{v}})^2+\eta\sum_{k,j}\widetilde{\left(\frac{\delta v_j}{\partial x_k}+\frac{\delta v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta v_j}{\partial x_k}}-$$

$$-\frac{2}{3}\eta\,\widetilde{(\nabla\delta\vec{v})^2}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\cdot\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)-\left(\tilde{p}\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_k}+\widetilde{\delta p\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\delta v_k}{\partial x_k}}\right)+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(-\rho\cdot\widetilde{\delta v_k\cdot\delta i}-\tilde{v}_k\cdot\widetilde{\delta\rho\cdot\delta i}-\widetilde{\delta v_k\cdot\delta\rho\cdot\delta i}+\widetilde{\delta p\cdot\delta v_k}), \qquad (2.3$$

where $\delta f=f(\bar{r},\,t)-\tilde{f}(\bar{r},\,t)$ is the fluctuation of the parameter f, v_j are the cartesian components of the flow velocity, and η and ζ are the shear and the bulk fluid viscosity, respectively [3]. The system (2.1)—(2.3) is too intricate to be directly integrated.

The entropy source is [3d]:

$$g_S=\frac{\eta}{2T}\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\cdot\delta_{jk}\cdot\nabla\tilde{\vec{v}})^2+\frac{\zeta}{T}(\nabla\tilde{\vec{v}})^2. \qquad (2.4)$$

As $\nabla\tilde{\vec{v}}\alpha\left(\frac{v}{c}\right)^2=M^2$ (c being the sound speed in the fluid, and M the Mach number), the ζ term is of the order M^4. Then, in the usual case of subsonic flows, the bulk contribution to the pressure drop can be neglected.

If $v\ll c$, we have $\delta\rho=\rho-\tilde{\rho}\ll\tilde{\rho}$ (incompressible fluids), and the equations (2.1) — (2.2) become:

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_j}=\eta\Delta\,\tilde{v}_j-\rho\left[\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\left(\tilde{v}_k\cdot\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{(\delta v_j\cdot\delta v_k)}\right)\right],\quad(j=1,\,2,\,3) \qquad (2.5)$$

$$\nabla\,\tilde{\vec{v}}=0, \qquad (2.6)$$

Even the system formed by the eqs. (2.5), (2.6), and the correspondingly simplified (2.3) equation is too involved, because of the fluctuation terms. As $\sum_{k=1}^{3}\rho\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\widetilde{(\delta v_j\cdot\delta v_k)}\alpha\frac{\rho\,\mathrm{d}v}{\eta}=Re$ (d being a characteristic length for the flow*, and Re the Reynolds number), one can obtain analytical solutions only for small Reynolds number. If not, we must resort to semiempirical relations.

2.2. *Univocity parameters and similarity criteria*

The univocity parameters involved so far in the description of the monophysic flows are (for incompressible fluids) the fluid density ρ

* For pipes, d is the hydraulic diameter.

and the shear viscosity η, the pipe hydraulic diameter d and the absolute roughness h (the characteristic height of a roughness element), and the flow speed v. As the active fundamental physical quantities of this physical problem are the length, the mass and the time, the number of irreducible similarity criteria should be equal with 2.*

The frequently used criteria [4] are the Reynolds number $Re = \frac{\rho\, d v}{\eta} = \frac{4\dot{M}}{\eta P}$, the Mach number $M = \frac{v}{c}$, the relative roughness $\frac{h}{d} = \frac{h \cdot P}{4S}$, the roughness Reynolds number $Re^+ = \frac{\rho h v_\tau}{\eta} = \frac{10\pi}{\sqrt{8}} \cdot \frac{h}{\delta}$ (where $v_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ is the shear velocity, τ being the wall shear streess, and $\delta = \frac{10\pi d}{Re\sqrt{f}}$ is the thickness of the boundary layer) and the Darcy friction factor f. If we choose as irreducible criteria the Reynolds number and the relative roughness, we have**.

$$f = f\left(Re, \frac{h}{d}\right), \quad Re^+ = Re^+\left(Re, \frac{h}{d}\right). \tag{2.8}$$

2.3. *Flow regimes*

As we have shown, the system (2.1) — (2.3) can be integrated if we can neglect the fluctuation terms, i. e. if $Re < Re_{cr} \sim 1500 \ldots 2500$. This flow regime is called laminar flow. We will discuss the Poiseuille-Hagen solution for the friction factor in the next section. If $Re > Re_{turb} \sim 2500 \ldots 4\,000$, the fluctution contributions are great enough, and we have turbulent flow. When $Re_{cr} < Re < Re_{turb}$, we have a transition regime.

The turbulence is clearly influenced by the roughness of the pipe, namely by the ratio $\frac{\delta}{h}$ between the thickness of the boundary layer and the absolute roughness. If $\delta \gg h$ ($Re^+ < 0.125$), the roughness contribution can be completely neglected, and we have a „smooth pipe flow" regime ($f = f(Re)$). If $\delta \ll h (Re^+ > 100)$, the roughness effect is predominant, and we have a „squared flow" regime $\left(f = f\left(\frac{h}{d}\right)\right.$, implying $\left.\frac{dp}{dl} \alpha\, v^2\right)$. When $\delta \sim h$ ($0.125 < Re^+ < 100$), both viscosity and roughess contributions must be considered and we have a „presquared flow" regime. If we use the Blasius equation for smooth pipe flows and the Prandtl-Nikuratse equation for the squared flows (see next Section), the limits

* Cf. Buckingham (π) theorem [5].
** Cf. Federman theorem [5].

f these regimes become $Re < 0 \cdot 58 \left(\frac{d}{h}\right)^{8/7}$ for smooth pipe flows, and

$Re > 571 \cdot \frac{d}{h} \cdot \log_{10}\left(\frac{3.71\, d}{h}\right)$ for squared flows, respectively.

3. Agreement between the published semiempirical relations and the experimental data

3.1. *Laminar flow*

When $Re < Re_t$, the system (2.5)—(2.6) can be easily integrated 3], giving the Poiseuille-Hagen solution : $f = \frac{A}{Re}$, (3.1)

here A is a constant depending on the pipe shape. For different shapes e have : $A = 64$ (circle), 96 (annulus) 52 (rectangular isosceles triangle), 3 (equilateral triangle), 57 (square), 71 (rectangle with sides ratio 3.5 : 1). he relation (3.1) is verified [6] on the whole range $Re < Re_{cr}$, with the rror level $|\varepsilon| < 1\%$ (the error level being defined as :

$$\varepsilon = \frac{f_{\text{theor}} - f_{\text{exp}}}{f_{\text{exp}}} \cdot 100\,(\%)). \tag{3.2}$$

3.2. *Transition regime*

The published formulae for this regime are of the type [3a] :

$$f = a \cdot Re^{-b}, \tag{3.3}$$

ith $b \approx 0.5$, but they completely disagree with the experimental data. ome authors [3, 4] consider that the Darcy friction factor expression cor- sponding to this regime is certainly very intricate, but they do not give ny expression. On the other hand, the experimental data show the same ehaviour, but the limits (Re_{cr} and Re_{turb}) differ in a wide range. These ifferences seem to be weakly influenced by the relative roughness, but ney strongly depend on the used materials and the pipe type, suggesting ne necessity of some other similarity criteria.

3.3. *Turbulent flows**

3.3.1. *Smooth pipe flow regime*

This flow regime is one of the most studied [3, 4, 6, 7]. The expe- mental data are in both qualitative and quantitative agreement. There- re many semiempirical relations for the Darcy friction factor are propo- d. The most used relations are listed in Table I, specifying their vali- ty ranges (the analysis was made for $Re < 10^8$) and error levels. We

* We must specify that there are not reported relations for transonic and supersonic ws, though such relations can be necessary for the design of the superconducting cables cooled th gaseous helium.

found that we can obtain any accuracy (up to the experimental one), by a convenient choice of the numerical constants.

Table 1

Darcy friction factor expressions for smooth pipe flow regime

No.	SEMIEMPIRICAL EXPRESSIONS	AUTHORS	GOOD AGREEMENT		SATISFACTORY AGREEM.	
			Validity ranges	Error levels	Validity ranges	Error levels
1.	$f = \frac{1}{\sqrt[4]{100\ \mathrm{Re}}}$	Blasius	$\mathrm{Re}_{turb}\ldots10^5$	$\lvert\varepsilon\rvert<3\%$	$10^5\ldots2\cdot10^5$	$-5\%<\varepsilon<3\%$
2.	$f = \frac{1}{\sqrt[6]{8\cdot10\ \mathrm{Re}}}$	Meissner-Schubert	4500...7000	$\lvert\varepsilon\rvert<3\%$	$\mathrm{Re}_{turb}\ldots4500$ 7000..8500	$-5\%<\varepsilon<-3\%$ $3\%<\varepsilon<5\%$
3.	$f = \frac{1}{\sqrt[5]{5000\ \mathrm{Re}}}$	Colburn	$2\cdot10^4\ldots2\cdot10^6$	$\lvert\varepsilon\rvert<5\%$	$10^4\ldots2\cdot10^4$ $2\cdot10^6\ldots4\cdot10^6$	$-5\%<\varepsilon<-3\%$
4.	$f = 0.0032 + \frac{0.221}{\mathrm{Re}^{0.237}}$	Nikuratse	$6\cdot10^4\ldots10^8$	$\lvert\varepsilon\rvert\leqslant3\%$	$3\cdot10^4\ldots6\cdot10^4$	$-5\%<\varepsilon<-3\%$
5.	$f = 0.056 + \frac{0.5}{\mathrm{Re}^{0.32}}$	Drew-Koo-McAdams	$\mathrm{Re}_{turb}..10^8$	$\lvert\varepsilon\rvert<3\%$		
6.	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8\log_{10}\mathrm{Re} - 1.64$	Filonenko-Altshul	$5.10^4...3.10^7$	$\lvert\varepsilon\rvert<3\%$	$10^4\ldots5\cdot10^4$ $3\cdot10^7\ldots10^8$	$3\%<\varepsilon<5\%$
7.	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8\log_{10}\mathrm{Re} - 1.52$	Konakov	$\mathrm{Re}_{turb}\ldots10^8$	$\lvert\varepsilon\rvert<2\%$		
8.	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8\log_{10}\mathrm{Re} - 1.50$	Frenkel	$\mathrm{Re}_{turb}\ldots10^8$	$\lvert\varepsilon\rvert>1\%$		
9.	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log_{10}(\mathrm{Re}\sqrt{f}) - 0.8$	Prandtl-Karman — Nikuratse	$\mathrm{Re}_{turb}\ldots10^8$	$\lvert\varepsilon\rvert<1\%$		

3.3.2. *Presquared flow regime*

The most used expressions for technological pipes (natural roughness) are :

$$f = 0\cdot11\sqrt[4]{\frac{68}{Re} + \frac{h}{d}}\ \text{(Altshul)}, \qquad (3.$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\left(\frac{6.81}{Re}\right)^{0.9} + \frac{h}{3.71\ d}\right] \quad \text{(Frenkel)}, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{f}} + \frac{h}{3.71\ d}\right) \quad \text{(Colebrook-White)}, \tag{3.6}$$

which generalize respectively the Blasius (I. 1), Frenkel (I.8) and Prandtl-Karman-Nikuratse (I.9) formulae for smooth pipe flow. Unfortunately, they are in a rather poor agreement (5 ... 10 % differences). But the experimental data also disagree (e. g., more than 10 % differences between Sheveliov results ([6c], Fig. 1) for water flow in steel pipes and Isaev

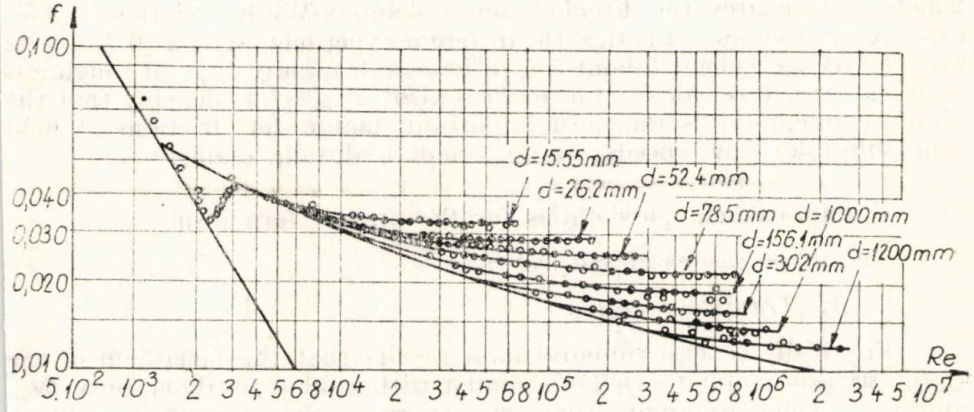


Fig. 1 — Sheveliov's results for water flow in steel pipes, with technical roughness (h = 0.11 mm).

ones [7e] for oil). More than that, Nikuratse results ([6b], Fig. 2) for granular (artificial) roughness show even a different behaviour for the

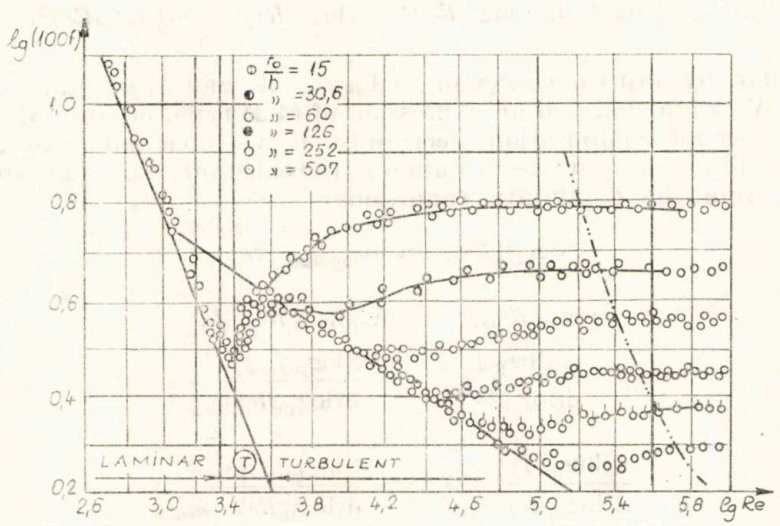


Fig. 2 — Nikuratse's results for water flow in steel pipes, with granular (artificial) roughness $\left(r_0 = \frac{d}{2}\right)$.

Darcy friction factor, clearly suggesting the necessity of other similarity criteria.

3.3.3. *Squared flow regime*

The best expression for this regime is the Prandtl-Nikuatse one :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10}\left(\frac{3.71\ d}{h}\right), \tag{3.7}$$

which extrapolates the Frenkel and Colebrook-White relations (3.5), (3.6). A remarkable fact is that the different experimental data [6,7] are in satisfactory agreement (about 5% differences), for any type of roughness (and the error level for (3.7) formula is also $|\varepsilon| \lesssim 5\%$), showing that the absolute roughness is the most important factor for frictions at high (but subsonic) flow speeds, and/or small hydraulic diameters.

4. Improvement possibilities for the present formalism

4.1. *New semiempirical relations*

4.1.1. *Transition regime*

From all the experimental data results that the behaviour of the Darcy friction factor $f = f(\mathrm{Re})$ is similar with a cubic parabola, only Re_{cr} and Re_{turb} being different. Then, we can try to fit an expression like :

$$f = A_0 + A_1 \cdot Re^x + A_2 \cdot Re^{2x} + A_3 \cdot Re^{3x}, \tag{4.1}$$

or :

$$\log_{10} f = a_0 + a_1 \cdot \log_{10} Re + a_2(\log_{10} Re)^2 + a_3(\log_{10} Re)^3, \tag{4.2}$$

or similar, by adjusting constants ($A_0, \ldots A_3$ and x, or $a_0, \ldots a_3$ etc.)

We have analysed an expression of (4.2) type, because of the simpler numerical computations (certainly, if we have more constants to fit, we will obtain a greater accuracy) ; the constants $a_0, \ldots, a_3$ are determined from the continuity conditions :

$$\log_{10} f(Re_{cr}) = \log_{10} f_{lam}(Re_{cr}), \tag{4.3.a}$$

$$\log_{10}(Re_{turb}) = \log_{10} f_{turb}(Re_{turb}), \tag{4.3.b}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\log_{10} f)}{\mathrm{d}(\log_{10} Re)}\right|_{Re_{cr}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\log_{10} f_{lam})}{\mathrm{d}(\log_{10} Re)}\right|_{Re_{cr}}, \tag{4.3.c}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\log_{10} f)}{\mathrm{d}(\log_{10} Re)}\right|_{Re_{turb}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\log_{10} f_{turb})}{\mathrm{d}(\log_{10} Re)}\right|_{Re_{turb}}. \tag{4.3.d}$$

If we use for f_{turb} a presquared type relation, the coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 will depend on the relative roughness.

The numerical computations were made using the relation (3.1) for f_{lam} (with $A = 64$) and the Pradtl-Karman-Nikuratse one for f_{turb}, and choosing $\log_{10}Re_{cr} = 3.35$ ($Re_{cj} \cong 2238.72$) and $\log Re_{turb} = 3.55$ ($Re_{turb} \cong 3548.13$), in agreement with Stanton and Pannel [6a] and Nikuratse [6b] experimental results. The obtained relation:

$$128.\log_{10}(100\,f) = 380032 - 329969 \cdot 10\log_{10}Re + +95460(10\log_{10}Re)^2 - \\ - 9200(\log_{10}Re)^3, \tag{4.4}$$

is in good agreement ($|\varepsilon| \lesssim 1.5\%$) with the before mentioned experimental data.
We specify that, for computer calculations, one must use double precision, because only the last figures are significant (the left hand side of the equation (4.4) is less than 100 for all the similarity ranges of the transition regime).

4.1.2. *Presquared flow regime*

We have seen that the Reynolds number and the relative roughness are not enough to describe the frictions in this regime. Then, as long as we will not introduce some new similarity criteria, we must have as many adjustable constants as possible. The best form seems to be:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -a_1 \cdot \log_{10}\left[\left(\frac{a_2}{Re}\right)^{a_3} + \left(\frac{h}{a_4 d}\right)^{a_5}\right], \tag{4.5}$$

generalizing the Frenkel expression (3.6). The analysis of the experimental data for technological pipes [6c, 7] shows that we obtain a satisfa c tory agreement ($|\varepsilon| \lesssim 5\%$) if we choose the constants $a_1, \ldots a_5$ to give:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.9 \log_{10}\left[\left(\frac{6.75}{Re}\right)^{0.95} + \left(\frac{h}{3.75\,d}\right)^{1.05}\right]. \tag{4.6}$$

4.1.3. *Specific relations*

To avoid the difficulty of new similarity criteria, Sheveliov [6c] proposed to use specific relations for restricted material classes.
One possible way to do that is to chosse a relation of the type (3.5), (3.6), and to adjust its numerical constants to fit the experimental results. Using this method for the Sheveliov's experimental results, and starting from the Altshul expression (3.4), we have obtained an error level $|\varepsilon| \lesssim 3.5\%$ for the relation:

$$f = 0.133\left(\frac{51.326}{Re} + \frac{h}{d}\right)^{0.25}, \tag{4.7}$$

respectively $|\varepsilon| \lesssim 2.5\%$ for the relation:

$$f = 0.0964\left(\frac{73.676}{Re} + \frac{h}{d}\right)^{0.226}. \tag{4.8}$$

4.2. *New univocity parameters and similarity criteria*

The disagreements between the experimental data for transitory regimes can be explained only if we take into account some supplementary factors interfering with the friction.

For instance, to completely describe the roughness, besides the characteristic height of a roughness element h (absolute roughness), we need the characteristic width of a roughness element b, the characteristic pitchof roughness elements p, the roughness wavelength k (the characteristic pitch of maximum roughness elements), and the undimensional formfactor g. Correspondingly, the similarity criteria are $\frac{h}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{p}{d}$, $\frac{k}{d}$ and g.

Their contributions probably explain the strong disagreement between the experimental data for technological pipes and for granular roughness (see [8]). These parameters allow to describe also simulate roughness. For instance, for gaseous helium in pipes with rectangular spiral tape (having the height h, the width b and the spiral pitch $k = b + p$), Budrik [9a] proposes the expression: $f = \frac{b}{k} \cdot f_0 + \frac{p}{k} \cdot f_1 F$, where:

$$f_0 = (1.8\log_{10} Re - 1.5)^{-2},$$

$$f_1 = 0.5\left(2\log_{10}\frac{d}{k} + 2.1\right)^{-2}, \quad F = 1.2\left(\frac{20000}{Re}\right)^{0.5646} + \left(\frac{Re}{20000}\right)^{z}, \tag{4.9}$$

$$z = 0.8686\left[\left(\frac{3h}{k}\right)^{1.3} + \left(\frac{k}{3h}\right)^{1.3}\right]^{-1}$$

(error level $|\varepsilon| \lesssim 5\%$).

Another factor, which can explain the differences between water [6c] and oil [7e] flows in steel pipes, is the fluid-solid surface stress σ. The corresponding similarity criterion is the relative stress $T = \frac{\sigma \cdot f}{\tau \cdot d} = \frac{8\sigma}{\rho v^2 d}$, τ being the wall shear stress.

Up to now, we have discussed only isothermal flows. When heat exchange occurs, new contributions must be taken into account. Experimental data suggest that we can complete the description of the frictions with the aid of the criterion $\frac{\eta_f}{\eta_w}$, where η_f and η_w are the shear viscosities at bulk fluid and wall temperatures, respectively. For water flow in smooth steel pipes, Lafay [9c] proposes the expression:

$$f = f_0(1 - 0.5X^Y \log_{10} X), \text{ where: } X = 1 + \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} - 1\right)\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0.17},$$

and :

$$Y = 0.17 - \frac{Re}{5 \cdot 10^5} + \frac{1800}{Re} \tag{4.10}$$

(f_0 being the isothermal Darcy friction factor, e. g $\sqrt{f_0} = (1.8 \log_{10} Re - 1.5)^{-2}$) in good agreement with his experiments (error level $|\varepsilon| \lesssim 3\%$). Other authors propose a simpler expression :

$$f = f_0 \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} \right)^n, \tag{4.11}$$

where n can be adjusted for the interesting materials and similarity ranges.

No experimental, neither theoretical investigations were made on the influence of the electric field. The heat transfer studies [9c] suggest an electric similarity criterion defined as :

$$El = \rho \cdot d_0^2 E^2 \cdot \Delta T \cdot \eta^{-2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T_w} \right), \tag{4.12}$$

where E is the electric field intensity at the conductor surface, ΔT is the temperature difference between the conductor and the fluid, and ε is the fluid permitivity.

4.3. *Necessary experimental investigations*

From our analysis clearly results that the published experimental data are by far incomplete.

No detailed investigation were made to clear up the factors which influence the transition regime (namely Re_{cr} and Re_{turb}). The theoretical studies made so far [10] did not solve this problem.

No specific experiments were made to separate the effects of the different roughness criteria, or of the relative stress. The present data can only suggest such effects, but cannot give numerical corrections, though such corrections can be very important.

No studies were made on flow frictions in rough pipes when heat exchange occurs. Clearly, this is the case in almost all heat exchangers. In the same time, no studies were made to see if there are no other significant criteria than $\frac{\eta_f}{\eta_w}$ (for instance : $\frac{\rho_f}{\rho_w}$, $\frac{\tau_f}{\tau_w}$, etc., defined in the same way, and the Prandtl number $Pr = \frac{1}{\lambda} \cdot \eta c_p$ λ and c_p being the fluid thermal conductivity and specific heat at constant pressure, respectively).

The very simple relation for smooth pipe flow regime [4d] :

$$j = \frac{f_0}{8} \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} \right)^{0.14}, \tag{4.13}$$

where $j = \frac{\alpha}{\rho^v}\left(\frac{\eta^2}{\lambda^2 c_p}\right)^{1/3}$ is the Colburn factor (α is the convective heat transfer coefficient) and f_0 is the isothermal Colburn friction factor (I.3) shows a strong relation between friction and heat exchange phenomena.

The theoretical and experimental analyses of the supersonic flows made so far concern mainly with the shock waves. This is important for the design of supersonic engins, but do not solve the problem of super conducting cables cooled with gaseous helium.

We are not interested in Couette flows, though this problem, yet unsolved, may be very significant for the theoretical understanding of the flow phenomena.

Finally, we did not found experimental investigations concerning particularly the cryogenic fluid frictions for the working regimes of the cables. For our purpose — the design of cryogenic cables — such investigations have an outstanding importance.

5. Conclusions

We have analysed the general flow equations and shown the necessity of using semiempirical expressions for the Darcy friction factor. The agreement between these expressions and the experimental results was investigated in detail, for different flow regimes. Our investigation pointed out some specific troubles, and the corresponding improvement possibilities.

We have proposed some new semiempirical relations ((4.1), (4.2) and (4.4)—(4.8)), for the transitory regimes. Our relations are in better agreement with the experimental data than the so far published expressions.

We have discussed the different factors which can influence the internal friction phenomena. Their importance arise from the quoted experiments.

We conclude that the Darcy friction factor expressions are a very convenient way to describe the friction phenomena, but new experimental investigations are necessary to complete our knowledges on this area.

REFERENCES

1. *D. Iordache, M. Stan, L. Daniello, Gh. Lăzărescu*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, Electr. S., **41**(4)11(1979).
2. a) *D. Iordache, V. Iancu, Gh. Lăzărescu, I. Pop, L. Iflode, C. Mocuţa*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, Electr. S., **43**(2)17(1981) (no. 1 of this series); b) *V. Iancu, D. Iordache, M. Stan, D. Gavrilă, Gh. Lăzărescu, A. Tomovici*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, Electr. S., **44**(2)13(1982); (no. 2 of this series); c) *Gh. Lăzărescu, D. Iordache, V. Iancu, L. Popa, I. Pop, V. Tudoricu*, Bul. Inst. Politehn. Bucureşti, Electr. S., **44**(3)36(1982) (no. 3 of this series).
3. a) *N. Z. Frenkel*, „Guidravlika", Gos. energ. izd. Moscow, 1956; b) *I. E. Idelcik*, „Spravotchnik po guidravlicheskim soprotivleniam", Moscow, 1960; c) *D. Cioc*, „Mecanica fluidelor", Ed. didact. pedag, Bucharest, 1967; d) *L. D. Landau, E. M.*

Lifschitz, „Mécanique des fluides", Ed. Mir, Moscow, 1971; e) *P. Brădeanu*: „Mecanica fluidelor", Ed. tehn., Bucharest, 1973.

4. a) xxx „High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion", 5th vol., „Turbulent Flow and Heat Transfer", Princeton Univ. Press, 1959; b) *R. Barron*, „Cryogenic Systems", McGraw Hill, New York, 1966; c) *J. A. Clark*, „Cryogenic Heat Transfer" in „Advances in Heat Transfer", 5th vol., Acad. Press, New York, 1968; d) *A. G. Lenfesteу*, „Heat Transfer Fluid Flow" in „Advanced Cryogenics", Plenum Press, London, 1971; e) *C. Stamatescu et al.*, „Tehnica frigului", 2nd vol. Ed. tehn., Bucharest, 1979.
5. a) *A. A. Gukhman*, „Introduction to the Theory of Similarity", Acad. Press., New York, 1965; b) *D. Iordache*, „Noțiuni și metode generale ale fizicii", Pol. Inst., Bucharest, 1980.
6. a) *A. Stanton, R. Pannel*, „Similarity of motions to surface friction of fluids", Plut. Trans. Roy. Soc., (A), 1914; b) *S. J. Nikuradse*, VDI Forsch. arbeiten Heft **281** (1926); ibid., **356** (1932); ibid., **361** (1933); c) *M. N. Sheveliov*, „Issledovanie guidravliteheskih zakonomernostei turbulentnovo dvidzenie v trubah", Moscow, 1953.
7. a) *T. B. Drew, E. C. Koo, W. M. McAdams*, Trans. Am. Thst. Chem. Eng., *28*, 56 (1932); b) *A. F. Colburn*, ibid. *29*, 184 (1933); c) *R. G. Huelbscher*, ASHVE Trans., *54* 101 (1948); d) *G. A. Murin*, Izv, V. T. I., *10* (1948); e) *I. A Issaev*, Neft. hoz. (1951); f) *M. F. Taylor, T. A. Kirchgessner*, N. A. S. A. Techn. Note, T. D. H. 133 (1959); g) *A. W. Date*, Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 845 (1974).
8. a) *W. B. Hall*, J. Mech. Eng. Sci., 4 (3) 287 (1962); b) *D. F. Dipprey, R. H. Sabersky*, Int. J. Heat Mass Transfer, **6**, 329 (1963); c) *R. L. Webb, E. R. G. Eckert, R. J. Goldstein*, ibid, **14**, 601 (1971); d) *C. J. Lawn*, G. E. G. B. Berkeley Report RD/B/N 1980 (May 1971); e) *M. J. Lewis*, E. I. R. Würenlingen CH Report TM-IN-524 (dec. 1972); ibid., Raport TM-IN-538 (july 1973); Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 809 (1974).
9. a) *V. V. Budrik*, „Issledovanie protsessov v krioghennih ustanovkah i sistemah", Balashiha, Moscow (1980): b) *J. Lafay*, Int. J. Heat Mass Transfer, *17*, 815 (1974); c) *J. Rutkowski*, Cryogenics, *17*, 242 (1977).
10. a) *W. P. Jones, B. E. Landauer*, Int. J. Heat Mass Transfer, *16*, 1119 (1973); b) *P. Hrycak*, ibid., *17*, 869 (1974).

Problemele fizice implicate în proiectarea cablurilor criogenice. IV. Studiul expresiilor semiempirice ale factorului de frecare Darcy pentru curgeri monofazice în conducte rugoase

Ecuațiile generale și diferitele regimuri de curgere au fost analizate, constatînd necesitatea utilizării unor relații semiempirice. Concordanța dintre expresiile publicate pentru factorul de frecare și datele experimentale a fost studiată, fiind stabilite domeniile de valabilitate și nivelele de erori corespunzînd fiecărei corelații. Anumite ipoteze privind natura parametrilor de univocitate suplimentari și a criteriilor de similitudine corespunzătoare care permit evaluări mai precise ale factorului de frecare sînt examinate, fiind evidențiată necesitatea unor noi studii experimentale privind curgerile turbulente prin conducte rugoase. A fost analizată de asemenea posibilitatea utilizării unor relații specifice pentru clase restrînse de materiale. Au fost propuse noi relații semiempirice pentru diferite regimuri de curgere.

C.Z.: 621. 391 : 677. 52

LIQUID CRYSTAL SIGNAL ATTENUATION DEVICE FOR OPTICAL FIBERS

RODICA BENA, IULIANA CUCULESCU, M. OPRAN, CARMINA PLOSCEANU*

The paper presents the variation of transmission through silica optical fibers introduced in cells with liquid crystals, as function of the temperature of the liquid crystal and the electrical field applied.

Introduction

The signal propagation through optical fibers depends on a few important optical parameters like the refractive index of the ambiant medium. Liquid crystals are electro-optical media with refractive indexes varying as a function of temperature or applied electrical field.

Recently a device was built allowing the optical coupling by introducing in a liquid crystal the coaxial optical fiber having two cylindrical layers around the core, the coupling occuring between the fiber core with a refractive index n_1 and the outer layer with index n_3[1]. The coupling appears to be governed by the temperature variation of the medium surrounding the optical fiber-liquid crystal and having a refractive index n_4. In the first experiments [2] the surrounding medium was silicon oil whose refractive index varies with temperature too. The use of liquid crystal presents the advantage of a refractive index which can be varied by applying an electric field at any temperature within the mesophase range.

This paper presents a few results regarding the variation of transmission through silica optical fibers introduced in cells with compensated nematic and cholesteric liquid crystals having refractive indexes which could be varied either with temperature or by means of an applied steady electric field. The analysis of the way in which the transmission varies with temperature and the applied electric field leads to conclusions on the way a coupling device using liquid crystals could be built.

Experimental

Cylindrical optical fibers with one or two refractive indexes and diameter of 70 μm and 150 μm were introduced in liquid crystal cells with plane paralel transparent glass covered with I. T. O. electrodes (fig. 1). The electrode spacing was comparable to the fiber diameter. Microscopical observations showed that the optical fibers were surrounded by the li-

* Assist.: Lecturer Ph. D.; Lecturer Ph.D., Physics Dept.

quid crystal. The initial alignment of the liquid crystal with the molecular long axis along the fibers, hence paralel to the direction of propagation of light through them, was imposed by a to and fro motion of the fiber during encapsulation when the liquid crystal was in an isotropic phase. The devices had lengths between 4—5 cm and the radiation transmitted through the optical fibers was from a He-Ne laser of 20—40 mW power. The intensity of the transmitted light was detected by means of a Ø э U—19 photomultiplier and recorded as a function of temperature or applied electric field, directly on an X-Y recorder (fig. 2).

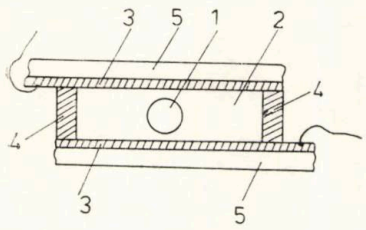


Fig. 1. — The device with liquid crystal and optical fiber; 1—optical fiber; 2 — liquid crystal; 3 — I. T. O. electrodes; 4 — insulated spacers; 5 — plane paralel glass plate.

The liquid crystals refractive indexes and their temperature variation was determined through direct measurements with the Abbè refractometer with an accuracy of 10^{-4}. Figures 3 a, b show the ordinary and extraordinary refractive indexes of the two compensated cholesteric mixtures (I, II) introduced in the optical fiber devices and their temperature variation up to the material reaching the isotropic phase, characterized by a single refractive index. In the liquid

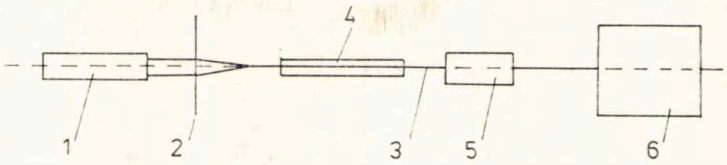


Fig. 2 — The experimental arrangement for measuring of transmission through the optical fibers; 1—He—Ne laser; 2 — lens; 3 — optical fiber; 4 — liquid crystal devices; 5 — photomultiplier; 6 — X — Y recorder.

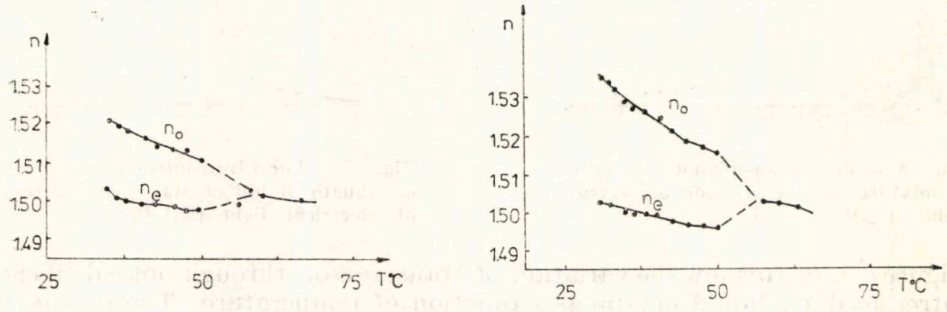


Fig. 3 a — The temperature variation of refractive indexes n_o and n_e for the compensated cholesteric mixture ChCl + ChLa 70 : 30% (I) (by weight). b — The temperature variation of refractive indexes n_o and n_e for the compensated cholesteric ChCl + ChNon (70 :30% molar) (II).

crystal devices, before the introduction of optical fibers the transmision variation of extinction polarized light was recorded as a function of temperature and electrical field (fig. 4—7).

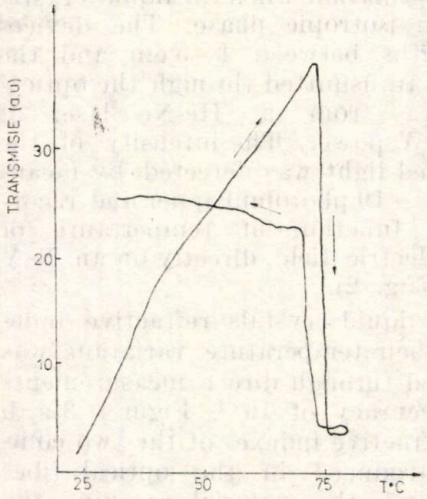


Fig. 4. — The transmission variation of mixture I as a function of temperature ($A \perp P$).

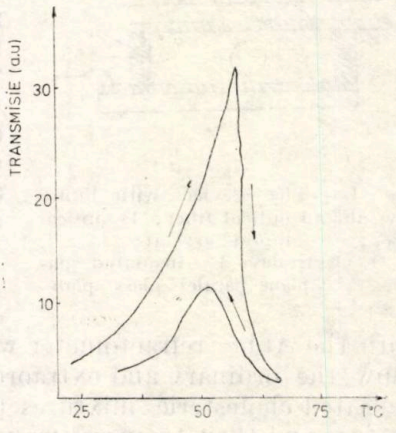


Fig. 5. — The transmission variation of mixture II as a function of temperature ($A \perp P$).

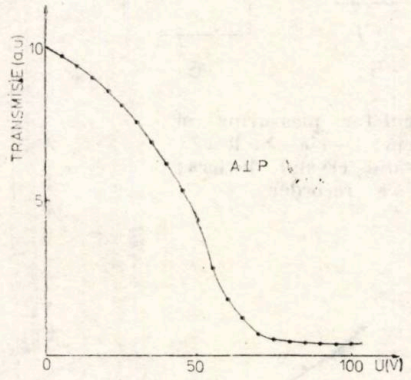


Fig. 6 — The transmission variation of mixture II as a function of electrical field ($A \perp B$).

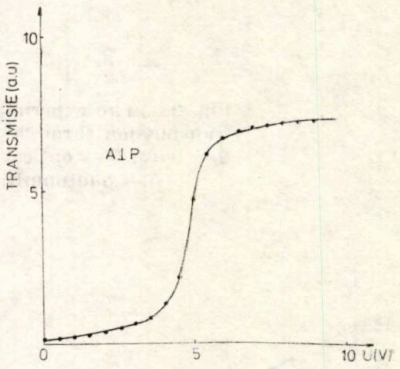


Fig. 7 — The transmission variation of nematic liquid crystal as a function of electrical field ($A \perp P$).

Figures 8, 9, 10 show the variation of transmisson through optical fibers introduced in a liquid crystal as a function of temperature. The common feature of the temperature variation of the transmission through the optical fibers surrounded by compensated cholesteric and nematic liquid crystals is its periodic temperature variation with a few pronounced maxima up to the isotropic phase of the liquid crystal. The maxima and minima

occur at the same temperatures in heating and cooling in the cells with nematic liquid crystal (fig. 10) and are slightly displaced in samples with cholesteric mixtures (fig. 8, 9). The transmissions are smaller in cooling for cholesteric cells (fig. 8) showing once again the optical and thermal hysteresis of cholesteric liquid cells.

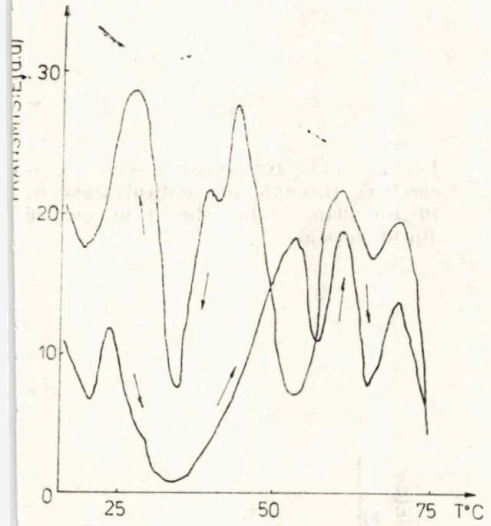


Fig. 8. — The transmission versus temperature through the cylindrical silica fiber of 150 μm diameter, introduced in I mixture (the first heating — cooling cycle).

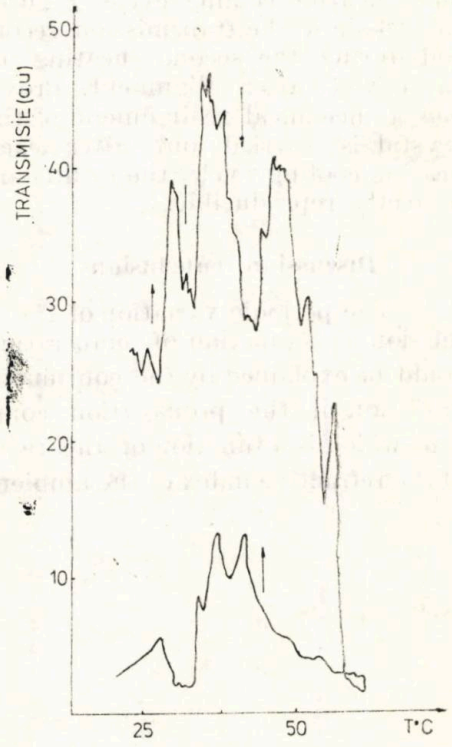


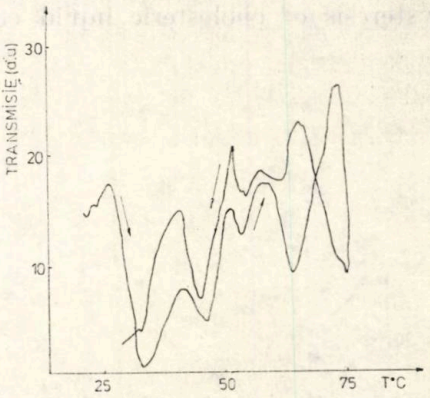
Fig. 9. — The transmission versus temperature through the optical fiber of 70 μm diameter, introduced in II mixtue (the first heating — cooling cycle).

An electric field was applied on the devices with the highest contrast [3].

Figures 11, 12 show the transmission variation as a function of applied voltage on the devices for which the temperature variation of transmission was recorded.

Figures 13, 14 show several microstructure features of liquid crystal and optical fibers cells under increasing applied fields. The microstructural changes of the nematics are the same around the fiber and throughout the cell (fig. 14 a, b). In the cell with the compensated cholesteric mixture nCl + ChLa (I) one notices a different motion of the liquid crystal along the fiber as compared to the rest of the cell(fig. 13 a, b). The optical fiber behaves as a liniar impurity around which the dynamic diffusion is very

much enhanced. In the nematic, (III) with smaller viscosity than the cholesteric mixture, no difference in behaviour is noticed due to the its easier „sliding", past the rigid fiber. A modification of the initial alignment of the liquid crystal molecules around the optical fiber is observed after a heating cooling cycle. Figures 15, 16 show the transmission recorded during the second heating of the device after alignment. Provided a mecanical realignment of the crystal is carried out after each heating-cooling cycle, the results are perfectly reproducible.



Tig. 10 — The transmission versus temperature thrcugh the optical fiber of 70 μm diameter introduced in nematic liquid crystal.

Discussion, conclusions

The periodic variation of transmission as a function of temperature could be explained by the continuous variation of the propagation constant which is a function of the ratio of the refractive index of the ambient

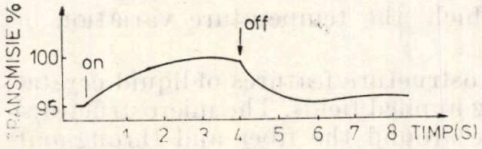


Fig. 11 — The transmission versus time at electrical field „on" and „off", through the silica fiber in I mixture (*A*//*P*).

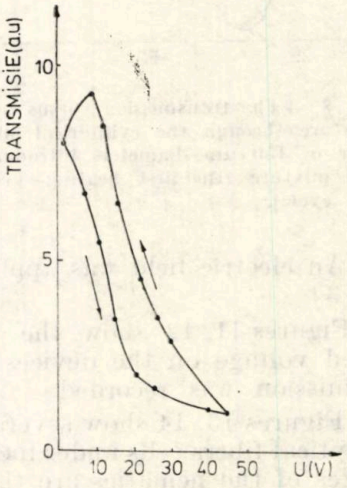
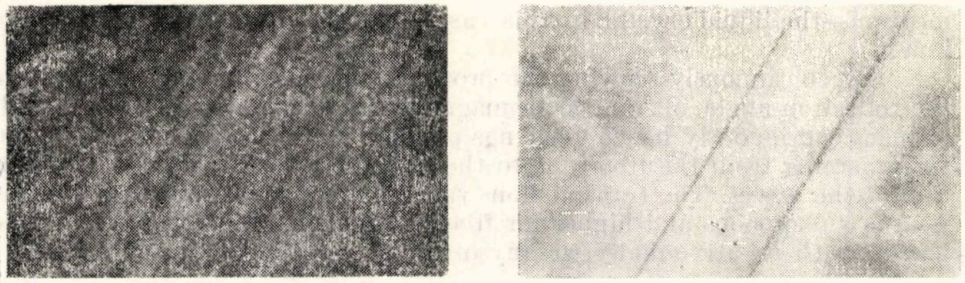
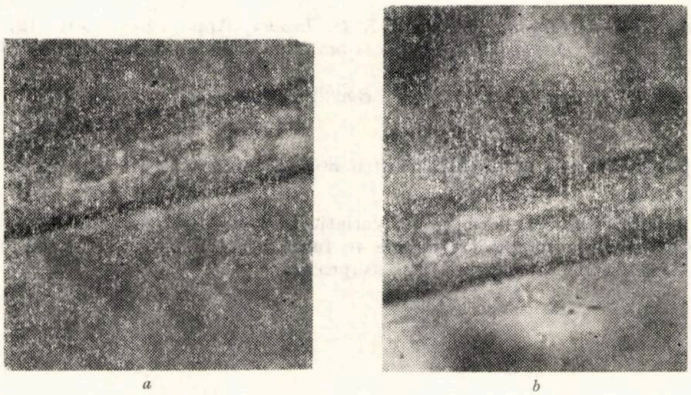


Fig. 12 — The transmission through the optical fiber in the nematic liquid crystal with negative dielectric anysotropy as a function of electrical field (*A*//*P*).



a *b*

Fig. 13 a — Silica fiber of 150 μm dimeter in I mixture; $t = 20°C$; $E = 0$; Cell thickness 175 μm. b — Silica fiber of 150 μm diameter in I mixture; $t = 20°C$; $E = 4 \cdot 10^6$ V/m; Cell thickness 175 μm.



a *b*

Fig. 14 a — Silica fiber of 150 μm diameter in nematic liquid crystal with negative dielectric anysotropy; $t = 20°C$; $E = 0$. Cell thickness 175 μm.
b — Dynamic scattering mode around the optical fiber.

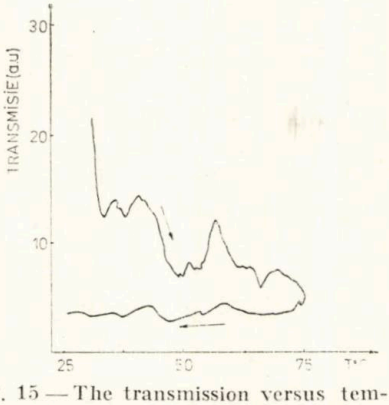


Fig. 15 — The transmission versus temperature through the cylindrical silica fiber of 150 μm diameter, introduced in I mixture (The second heating — cooling cycle, after the registration in fig. 8 and realignment;

Fig. 16 — The transmission versus temperature through the optical fiber of 70 μm diameter introduced in II mixture (the second heating — cooling cycle, after the registration in fig. 9 and realignment).

medium—the liquid crystal in this case—and the optical fiber refractive index.

By continuously varying the propagation constant with temperature the reflection angle of the electromagnetic waves on the optical fiber wall changes continuously hence yieldi nga periodic variation of the light intensity emerging from the fiber due to the periodic character of the propagation of the waves. The transmission variation due to the applied electric field is monotonous and higher for fibers introduced in a nematic liquid crystal with negative dielectric anysotropy.

REFERENCES

1. *V.I. Busurin, M- Green, J.R. Co:ens, K.D. Leaver*, Appl. Phys. Lett. **42**, 4, 1983
2. *J.R. Cozens, A.C. Boucouvalas, A.Al-Assam, M.J. Lee, D.G. Morris*, Electron. Lett. **18**, 15, 1982
3. *I. Cuculescu, C. Florea, A. Enache, I. Baciu*, Displays **2**, 2, 1980.

Dispozitiv cu cristale lichide pentru atenuarea transmisiei prin fibre optice

Lucrarea studiază modul de variaţie a transmisiei prin fibre optice introduse în celule cu cristale lichide în funcţie de temperatura cristalului lichid şi de cîmpul electric aplicat asupra sa.

C.Z.: 621.382

CALCULUL UNOR NIVELE ADÎNCI PENTRU IMPURITĂȚI INTERSTIȚIALE ÎN SILICIU

E. C. NICULESCU, P. MARIAN, I. M. POPESCU *

Se propune o metodă pentru calcularea nivelelor adînci pentru impurități interstițiale în Si. Articolul are la bază o observație a lui Herring [3] că în cazul nivelelor adînci, electronul impurității este puternic legat și deci puțin influențat de prezența potențialului cristalin. Este de așteptat ca aplicarea teoriei perturbațiilor, luînd potențialul cristalului ca perturbație, să conducă la rezultate bune.

Introducere

Nivelele energetice ale electronilor într-un cristal perfect formează o serie de benzi separate prin benzi interzise. Funcțiile de undă ale tuturor stărilor într-un cristal perfect se extind în tot cristalul și au aceeași amplitudine de probabilitate în fiecare celulă unitate. Periodicitatea nu permite deci, existența de stări localizate, adică stări ale căror funcții de undă să scadă rapid cu distanța în afara unui set de celule unitate. În prezența unei impurități însă, periodicitatea se strică și sînt permise stări localizate, care în majoritatea cazurilor sînt plasate în banda interzisă.

Pentru nivelele puțin adînci, spectrul energetic este determinat de „coada coulombiană" a potențialului de perturbație. Rezultă un spectru de hidrogen

$$E_n = \frac{1}{n^2} \frac{m^*}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \right)^2$$

unde m^* este masa efectivă a electronului sau a golului și ε permitivitatea electrică statică a semiconductorului.

Teoria nu este aplicabilă în cazul nivelelor adînci, pentru care electronul (sau golul) legat are orbite de rază mică. Pentru aceste defecte au fost dezvoltate alte tehnici de calcul [2].

Un procedeu relativ simplu pentru calculul nivelelor adînci ale impurităților interstițiale în semiconductori este prezentat în [1]. Articolul are la bază o observație a lui Herring [3] că, în cazul nivelelor adînci, electronul impurității este puternic legat și deci puțin influențat de prezența potențialului cristalin. Este, deci, de așteptat ca aplicarea teoriei perturbațiilor luînd potențialul cristalului ca perturbație să conducă la rezultate bune.

Descrierea metodei

Problema constă în aflarea valorilor proprii ale hamiltonianului care descrie cristalul în prezența impurității

$$H = -\nabla^2 + V + U \qquad (1)$$

* Asist.; Asist. Prof. dr ing., catedra Fizică

unde V este potențialul cristalului, U potențialul atomului impuritate. Soluția ecuației Schrödinger corespunzătoare

$$H\,\psi = E\,\psi \tag{2}$$

o vom căuta de forma

$$\psi = \Phi - \sum_c < \psi_c | \Phi > \psi_c \tag{3}$$

unde ψ_c sînt funcțiile de undă care descriu stările de miez ale cristalului și satisfac ecuația

$$H\,\psi_c = E_c\,\psi_c \tag{4}$$

Înlocuind expresia lui ψ dată de (3) în (2), obținem ecuația verificată de Φ

$$(H + V_R)\Phi = E\Phi \tag{5}$$

unde V_R este un pseudopotențial, definit prin relația

$$V_R = \sum_c (E - E_c) < \psi_c / \Phi > \psi_c \tag{6}$$

Cum $|E| < |E_c|$, V_R este un potențial repulsiv, și, conform teoremei de anulare [4], el anulează parțial potențialul V în regiunea de miez rezultînd un potențial V_{eff}

$$V_{eff} = V + V_R \tag{7}$$

Conform lucrării [1], alegem Φ ca o suprapunere de funcții atomice φ_i ale atomului impuritate liber

$$\Phi = \Sigma\, C_i\ \varphi_i \tag{8}$$

și înlocuind în (5) rezultă, după calcule simple, determinantul secular care dă valorile energiei

$$\det | < \varphi_i | H + V_R | \varphi_j > - E < \varphi_i | \varphi_j > | = 0 \tag{9}$$

Calculul nivelelor de energie

Urmînd lucrarea [1], facem următoarele aproximații:

1) Pentru că stările de miez ale cristalului sînt puțin modificate de prezența impurității interstițiale și pentru că alegerea lui Φ nu influențează prea mult potențialul repulsiv V_R, vom aproxima V_{eff} prin pseudopoten-

țialul model dat în referința [5]. Dezvoltînd în serie Fourier potențialul periodic V_{eff}

$$V_{eff}(\vec{r}) = \sum_{k} V(K) \cos(\vec{K}.\vec{\tau}) \cdot e^{-i\vec{K}\vec{\Gamma}} \tag{10}$$

în suma peste vectorii $\vec{K}$ ai rețelei reciproce sînt nenuli numai termenii cu $|K^2| \leqslant 11 \cdot \frac{a^2}{4\pi^2}$, cu a constanta rețelei cristaline și $\vec{\tau} = \frac{a}{8}$ (1, 1, 1)

Atunci:

$$V_{eff}(\vec{r}) = V_{eff}(0) + \sum_{\vec{K}=\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3} V(K) \cos(\vec{K}\cdot\vec{\tau}) \cdot e^{-i\vec{K}\vec{r}} = V_{eff}(0) + V'_{eff}(\vec{r}) \tag{11}$$

2) Vom considera că în vecinătatea impurității ($r < R$), potențialul U este cel de atom liber de impuritate, în timp ce la distanțe mari este un potențial hidrogenoid U_1, ecranat prin *permitivitatea* electrică a cristalului.

Potențialul U_1 a fost ales ca în lucrarea [2]

$$U_1(r) = \left(-\frac{Ze^2}{\epsilon_0 r}\right)\left[1 + \epsilon_0 A e^{-\alpha r} + (1 - A)\epsilon_0 e^{-\beta r} - e^{-\gamma r}\right] \tag{12}$$

adică potențialul coulombian al unei sarcini punctiforme (Ze), Z fiind valența impurității, ecranat cu funcția dielectrică $\epsilon(q)$, pentru care am folosit expresia analitică obținută de Nara [6]:

$$\frac{1}{\epsilon(q)} = \frac{Aq^2}{q^2 + \alpha^2} + \frac{(1 - A)\, q^2}{q^2 + \beta^2} + \frac{1/\epsilon_0 \cdot \gamma^2}{q^2 + \gamma^2} \tag{13}$$

cu $A = 1{,}175$; $\alpha = 0{,}7572$; $\beta = 0{,}3123$; $\epsilon_0 = 11{,}4$
și $\gamma = 2{,}044$ u.a. Această funcție e reprezentată în figura 1, unde este comparată cu funcțiile corespunzătoare calculate de Brust [7] și Walter

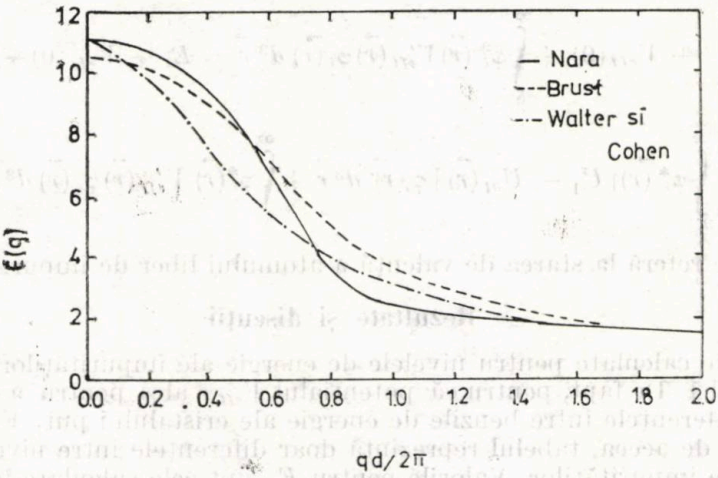


Fig. 1

și Cohen [8]. Consecițele impreciziei în forma lui $\epsilon(q)$ vor fi discutate într-o lucrare viitoare.

Potențialul atomului liber impuritate este definit ca [9]

$$U(r) = U_0(r) \qquad \text{pentru} \qquad r < R_0$$

$$U_{at}(r) = -\frac{1}{r} \qquad \text{pentru} \qquad r \geqslant R_0 \tag{14}$$

unde R_0 este valoarea lui r pentru care $U_0(r) = -\frac{1}{r}$ adică $U_0(R_0) = -\frac{1}{R_0}$, iar $U_0(r)$ este tabelat pentru o rețea suficient de deasă de puncte.

3) În aproximația de ordin zero, funcția Φ coincide cu funcția atomului liber de impuritate corespunzătoare stării de valență; funcțiile sînt tabelate în [14] și corespund configurațiilor $4S^2$ pentru Mn, Fe, Co, Ni, 4S pentru Cu.

Energia este dată de

$$E = \int_0^\infty \varphi_i^*(\vec{r})\,[-\nabla^2 + U + V_{eff}]\,\varphi_i(\vec{r})\,d^3\vec{r} =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_i^*(\vec{r})[-\nabla + U_{at}(\vec{r})]\varphi_i(r)\,d^3\vec{r} -$$

$$- \int_R^\infty \varphi_i^*(\vec{r})\,U_{at}(\vec{r})\,\varphi_i(\vec{r})d^3\vec{r} + \int_K^\infty \varphi_i^*(\vec{r})\,U_1(\vec{r})\,\varphi_i(\vec{r})\,d^3\vec{r} +$$

$$+ V_{eff}(0) + \int_0^\infty \varphi_i^*(\vec{r})\,V'_{eff}(\vec{r})\,\varphi_i(\vec{r})\,d^3\vec{r} = E_i + V_{eff}(0) +$$

$$+ \int_K^\infty \varphi_i^*(\vec{r})[U_1 - U_{at}(\vec{r})]\,\varphi_i(\vec{r})\,d^3\vec{r} + \int_0^\infty \varphi_i^*(\vec{r})\,V'_{eff}(\vec{r})\,\varphi_i(\vec{r})\,d^3\vec{r} \tag{15}$$

unde i se referă la starea de valență a atomului liber de impuritate.

Rezultate și discuții

Valorile calculate pentru nivelele de energie ale impurităților sînt date în tabelul 1. De fapt, pentru că potențialul V_{eff} e ales pentru a reproduce corect diferențele între benzile de energie ale cristalului pur, $V_{eff}(0)$ nu e estimat; de aceea, tabelul reprezintă doar diferențele între nivelele energetice ale impurităților. Valorile pentru E_i sînt cele calculate în [9].

Diferențe de energie	Calculate (eV)	Valori experimentale (eV)	Calculate în lucrări anterioare (eV)
$E_{Co} - E_{Fe}$	−0,338	−0,29	−0,08 [1]
$E_{Mn} - E_{Fe}$	+0,36	−0,11	+0,69 [1]
$E_{Ni} - E_{Fe}$	−0,61	—	+0,93 [1]
$E_{Be} - E_{Fe}$	+0,04	—	+0,12 [2]
$E_{Me} - E_{Fe}$	+0,835	+0,25	+0,25 [2]

Rezultatele obținute sînt comparate cu cele experimentale și cu cele obținute în lucrări anterioare.

Faptul că pentru impuritățile considerate valorile obținute nu depășesc banda interzisă a Si, arată că metoda e adecvată calculului de nivele adînci pentru impurități interstițiale.

Evaluarea elementelor de matrice pentru termenii de perturbație $\langle \varphi_i | V'_{eff} | \varphi_i \rangle$ și $\langle \varphi_i | U - U_1 | \varphi_i \rangle$ dau valori de aproximativ — 0,02 Ry și respectiv 0,16 Ry, care comparate cu valorile energiei electronului în atomul liber $E_i \simeq -0{,}55$ Ry reprezintă aproximativ 25%, deci procedeul de calcul de tip perturbațional e aplicabil.

În calculele făcute însă

1) Potențialul V_{eff} e ales pentru a reproduce corect tranzițiile optice din cristal și deci nu e testată corectitudinea lui pentru calculul altor proprietăți ale Si.

2) Nu s-a ținut seama de faptul că, din cauza polarizării diferite de către atomii de impuritate a cristalului gazdă, e de așteptat ca zeroul energiei să nu fie același pentru toate impuritățile.

3) În cazul nivelelor introduse de metalele de tranziție, calcule anterioare [10] indică o interacțiune slabă a stărilor 3d ale Cu cu stările de valență ale criteriului de Si, dar puternică pentru atomii de Mn, Fe, Co, deci în construcția funcției de undă a impurității ar trebui incluse și stările de tip 3d.

4) În calculele făcute s-a neglijat ecranarea potențialului de atom liber de impuritate (valabil pentru $r < R$) cu permitivitatea electrică a Si.

Într-o lucrare ulterioară vom lua, de altfel, în considerație și această corecție.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Glodeanu*, Rev. Roum. Phys. *10*, 741 (1965)
2. *S. T. Pantelides, C. T. Sah*, Phys. Rev. *B10*, 621 (1974)
3. *C. Herring*, Photoconductivity Conference, New York, (1956)
4. *M. H. Cohen, V. Heine*, Phys. Rev. *122*, 1821 (1961)
5. *J. Chelikowsky*, Phys. Rev. *B8*, 2786, (1973)
6. *H. Nara*, J. Phys. Soc. Jap. *20*, 778, (1965)
7. *D. Brust*, Phys, Rev. *B5*, 435, (1972)
8. *J. P. Walter, M. L. Cohen*, Phys. Rev. *B2*, 1821 (1970)
9. *F. Herman, S. Skillman*, Atomic Structure Calculations Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1963)
10. *M. Jaros*, Deep levels in semiconductors Adam Hilger Ltd, Bristol (1982)

It is proposed a method to calculate deep levels for interstitial impurities in Si. The crystal potential is supposed to be a small perturbation for the self consistent Hartree — Fock potential of free impurity atom. A complete computational work is performed for some elements in the first order of perturbation theory. The obtained levels are compared with the experimental ones and it is found a good agreement.

C.Z. :536.24/.25
621.59

PHYSICAL PROBLEMS IN THE DESIGN OF THE CRYOGENIC CABLES V. POSSIBILITIES OF THEORETICAL INTERPRETATION OF THE SEMIEMPIRICAL RELATIONS DESCRIBING THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER

D. IORDACHE, V. IANCU, R. LUNGU, G. LĂZĂRESCU, TATIANA POP, L. ALDEA, V. IORDACHE *

Starting from the analysis of the rigorous theoretical relations which describe the convective heat transfer between „thermal agent" fluids and the bodies whose temperature must be brought between certain limits, the similitude criteria and ranges, as well as the semiempirical relations allowing the description of the convective heat transfer in different conditions, were studied. The possibility to establish a correspondence between the Lyon-Petukhov's equations and certain semiempirical relations is also analysed.

Introduction

As it is known [1], the obtainment of low temperatures, respectively of high temperatures, in installations using the circulation of certain fluids — „thermal agent", is based on convective heat transfer between the fluids and the bodies whose temperature must be brought between certain limits. Since the thermal energy exchanged between the fluid and the studied bodies is an extensive parameter, the description of the convective heat transfer may be accomplished starting from the continuity (conservation) equation of any extensive parameter :

$$\frac{\mathrm{d}\rho_\mu}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot \bar{J}_\mu = \frac{\rho \delta_\mu}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \delta_\mu + \nabla \cdot \bar{v}_\mu = 0. \tag{1}$$

Taking into account that the volumic and the flux densities (ρ_μ) and $\bar{J}_\mu$) of any extensive parameter μ are related by relation :

$$J_\rho = -\frac{a\tilde{l}}{6} \nabla \overbrace{(n\mu_m V)} \equiv -D\nabla\delta_\mu \tag{2}$$

(where D is the diffusion coefficient), it results that the convective heat transfer may be described starting from the general equation :

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} = D\nabla^2 \rho_\mu - \bar{v} \cdot \nabla \rho_\mu \tag{3}$$

---

* Prof. Ph. D. ; Assist. Phys. ; Assist. ; Lect. Ph. D. ; Assist. Phys., Physics Department ; Prof. eng ; Prof. eng., Ind. Lyc. 21-Bucharest.

of the diffusion-convection processes.

If A is the area of the surface of convective heat transfer, one obtains:

$$|\bar{J}_W| = \frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\bar{v}}{A}\cdot\nabla W = -\frac{c}{A}\bar{v}\cdot\nabla T = \frac{c\cdot v_n}{A\cdot L}(T_w - T_b) \equiv$$

$$\equiv \alpha(T_w - T_b), \tag{4}$$

where T_w, T_b are the fluid temperatures at the wall surface, respectively in bulk, and L is a characteristic dimension for the temperature variation between the indicated values. Even the elementary considerations maked above point out the dependence of the Newton's coefficient α of the convective heat transfer on the flow parameters of the fluid, implicitly on the pipe roughness, etc.

2. The present description of the convective heat transfer

2.1. *General equations*

$$\text{Since } \alpha = \frac{J_W}{T_w - T_b} = \frac{J_W\cdot c_p}{i_W - i_b}, \tag{5}$$

where i_w, i_b are the mass densities of the fluid enthalpy, at the wall surface, respectively in bulk, the evaluation of the convective heat transfer coefficient requires the integration of the system of partial derivative equations (with boundary conditions) formed by the enthalpy equation:

$$\underset{①}{\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}\cdot\tilde{i})} + \underset{\boxed{1;3}}{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{\rho}\cdot\tilde{v}_k\cdot\tilde{i}) = \frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}} + \underset{③}{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{p}\cdot\tilde{v}_k)} + \underset{②}{T\cdot g_S} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) - \underset{③}{\left(\tilde{p}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_k} + \delta p\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\delta v_k}{\partial x_k}\right)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(-\underset{②}{\widetilde{\rho\cdot\delta v_k\cdot\delta i}} - \underset{②}{\widetilde{\tilde{v}_k\cdot\delta\rho\cdot\delta i}} - \underset{②}{\widetilde{\delta v_k\cdot\delta\rho\cdot\delta i}} + \underset{③}{\widetilde{\delta p\cdot\delta v_k}}), \tag{6}$$

(where $\delta f = f(\bar{r}, t) - \widetilde{f(r, t)}$ is the fluctuation of the physical parameter f) and the flow equation, respectively the continuity (conservation) equation of the fluid [2].

Since the equations which determine the flow and the thermal state of the fluid are too intricate to be integrate, simplifying hypotheses are usually adopted. Such a set of frequently accepted approximations is formed by the hypotheses [3]: 1) of the quasi-steady flow (the Newtonian averages of the fluid parameters on time intervals considerably gre-

ater than those between two successive molecular collisions do not change with time), 2) the flows are slow, the term corresponding to the volumic density of entropy production rate [2a]:

$$g_S = \frac{1}{2T} \sum_{k,l}^{1,3} \eta \left(\frac{\delta v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \cdot \delta_{lk} \nabla \bar{v} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\nabla \bar{v})^2, \tag{7}$$

being — for this reason — negligible; 3) the thermal effect of the hydrostatic pressure forces is negligible compared to those of viscous, respectively of inertial forces (in the enthalpy equation (6), under the terms which may be neglected, it was indicated inside a circle the numerical index of the accepted approximation). Another notable simplifications arise in the case of flows through cylindrical (with circular section) pipes, if the following hypotheses are accepted : a) the axial variation of the flow density of thermal energy is negligible compared with the radial variation; b) the axial variation of the axial component of the flow velocity is also negligible; c) the axial variations of the viscous and turbulent stresses are negligible; d) the physical properties of the fluid are constant [3a] or they change weakly with the temperature fluctuations, therefore, the physical properties at a given point can be considered constant and equal to the physical properties at the average temperature in this point [3b]. In these conditions, the enthalpy and momentum equations, respectively, may be written in the simplified form (eqs. Lyon-Petukhov [3]):

$$\rho \cdot v_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (J_W)_r] = \frac{1}{r} \left[r \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \rho \cdot \widetilde{\delta v_z \cdot \delta i} \right) \right], \tag{8}$$

$$\rho \cdot v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} - \rho \cdot \widetilde{\delta v_z \cdot \gamma v_r} \right) \right]. \tag{9}$$

Since, as we shall see in Section 4, even these simplified equations allow to obtain some analytical expressions of the convective heat transfer coefficient α, only if one receives some additional hypotheses, in practice one uses frequently certain semiempirical relations.

2.2. *Univocity parameters and similarity criteria*

As it has been found from the above equations, which give the Newton's coefficient of convective heat transfer, the parameters which determine univocally this coefficient in the case of monophasic forced flows in smooth pipes are : the density ρ, the shear viscosity η, the specific heat at constant pressure c_p, the thermal conductivity λ and the fluid flow velocity v. Since the active fundamental physical quantities for this problem are : the length, the time and the mass, it results (in agreement with so-called Π (Buckingham) theorem [4]) that there are 2 irreducible similarity criteria. The similarity criteria usually used are [1]: Reynolds

number $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ (L being a characteristic dimension of pipe, for example its diameter), Prandtl number $Pr = \frac{\nu}{D} = \frac{c_p \eta}{\lambda}$, Nusselt number $Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$, and Colburn number $j = \frac{Nu}{Re \cdot Pr^{1/3}}$. If we choose as irreducible similarity criteria the numbers Re and Pr, it results (in agreement with Federman theorem [4]) that: $Nu = Nu(Re, Pr)$, $j = j(Re, Pr)$.

In the case of natural monophasic flows, to the supplementary univocity parameter g (gravitational acceleration) corresponds the supplementary similarity criterion of Grasshoff $Gr = \frac{g \cdot L^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_b - \rho_w}{\rho_w}$, and the expressions of the criteria Nu and j (which describe the convective heat transfer) take the form: $Nu = Nu(Re, Pr, Gr)$, $j = j(Re, Pr, Gr)$.

For biphasic flows, to the explicit (the implicit one being the vapours fraction) additional univocity parameter, namely the vaporisation latent heat L_v, corresponds the Kutateladze's similarity criterion: $Ku = \frac{L_v}{c_p \Delta T}$, where ΔT is a characteristic (for the biphasic flows) temperature difference. Finally, in the case of flows in presence of an electrical field, to the additional univocity parameter — the intensity of the electric field — corresponds [5] the „electrical" similarity criterion (irreducible to the precedents): $El = \frac{1}{\eta^2} \cdot \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \cdot L^2 (T_w - T_b) E^2$ (of course in the case of the flows in rough pipes, it is also present the irreducible criterion of the relative roughness $\frac{h}{d}$).

2. 3. *Similarity ranges*

The similarity ranges specific to the description of thermal convection, certainly correspond to the active irreducible similarity criteria and — because to the close connection between the convective heat transfer and the fluid flow — to the flow regimes. Thus we distinguish (see, also, [6]): thermal convection in laminar ($Re < Re_{cr} = 1500 \ldots 2500$), thermal convection in turbulent regime ($Re > Re_{turb} = 2500 \ldots 4000$, with the subdomains of smooth pipe flow, presquared and squared turbulent regimes respectively) and — of course — convection in transition regime ($Re_{cr} < R < Ree_{turb}$).

3. Principal semiempirical relations presently used

The features of the principal semiempirical relations which allow to evaluate the convective heat transfer in forced monophasic flows are indicated in Table 1 (for fluids with constant physical parameters) and Table 2 (for fluids presenting considerable variations of the physical pa-

rameters). Studying the indicated semiempirical relations, we have found that the relations which present small deviations (compared with the experimental results [10] are : the Bosnjakovics relation for laminar regime (the deviations being greater towards the boundary with the transition regime), respectively — in the turbulent flow range — the Perroud,

Table 1

The characteristics of the principal semiempirical relations corresponding to the forced monophasic flows of fluids with constant physical parameters

THE SIMILITUDE RANGE	THE NATURE OF STUDIED FLUIDS	THE SEMIEMPIRICAL EXPRESSION OF Nu	AUTHORS
Laminor flows	Usual, and liquid nitrogen	$Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$	Bosnjakovics, Perroud [7]
Turbulent flows	Usual	$0.024\ Re^{0.8} Pr^{n}$, with $n = \begin{cases} 0.30, & w \to b \\ J_w & \\ 0.37, & b \to w \end{cases}$	Nusselt, Kraussold
,,	,,	$0.021\ Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4}$	[1e], Clark
,,	,,	$0.0263\ Re^{0.8} \cdot Pr^{0.3}$	[1e], Clark
,,	,,	$\frac{f}{8}\ Re \cdot Pr^{1/3}$	Colburn [7b]
,,	Usual, and liquid nitrogen	$\frac{0.0384\ Re^{0.75} \cdot Pr}{1 + 1.5\,(Re \cdot Pr)^{1/8}\,(Pr-1)}$	Bosnjakovics
,,	Cryogenical (liquid He)	$0.034\ Re_w^{0.8} Pr_w^{0.4} \left[\left(\frac{d}{L} \right)^{0.1} + 1 \right]$	Clark
,,	Cryogenical (liquid H_2)	$0.023\ Re_{eq}^{0.8} \cdot Pr_w^{1/3} \left[1 + \left(\frac{d_{eq}}{L} \right)^{0.7} \right]$	Clark
,,	Cryogenical (vapours H_2)	$0.023\ Re^{0.8}\ \ Pr^{0.4}$	Handricks
,,	Cryogenical (liquid N_2)	$0.024\ Re^{0.8}\ Pr^{0.4}$	Perroud [7c]
,,	(Cryogenical (liquid N_2)	$0.021\ Re^{0.8}\ Pr^{0.4} \left[1 + 0.01 \left(Re \cdot \frac{d_e}{L} \right)^{2/3} \right]$	Clark

Rebière and Weil's relation (relative deviations until 5 % for Re $> 5\,000$) and Clark's relation (for N_2 liquid, with relative deviations until 3 % for $5\,000 < Re < 25 \cdot 10^3$, respectively until 10 % for $Re > 25\,000$).

Taking into account the advantages presented by the description of thermal convection on close relation with the Darcy friction factor of the fluid, by correlations of Colburn type [7b], we have tested also in this work the compatibility of such correlations with experimental, results, holding as the best the explicite :

$$Nu = \frac{Re}{8} \cdot Pr^{1/3}\,(1.8 \log Re - 1.5)^{-2}, \qquad (10)$$

The characteristics of the principal semiempirical relations corresponding to the forced monophasic flows of fluids with variable physical properties *Table 2*

The similitude range	The nature of studied fluids	The semiempirical expression of Nu	Authors
Laminar flows $\frac{Re \cdot Pr}{L} \cdot d_{eq} > 10$	Liquid air and cryogenic fluids	$1.86 \left(\frac{Re \cdot Pr}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta_b}{\eta_w}\right)^{0.14}$	Mc Adams
Laminar flows	Cryogenical fluids	$B \left(\frac{\eta_b}{\eta_w}\right)^{0.14}$, with $B = 3.66$ ($T_w = \text{const.}$, $v_z = a + b.r^* + c.r^{*2}) \ldots 8$ ($v_z, J_W = \text{const.}$)	Norris, Streid
Turbulent flows	Classical fluids, at high temperatures	$F \cdot Pr^* [1 + 27.2F + (11.7 + 1.8 Pr^{-1/3}) \cdot F^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)] \left(\frac{\eta_b}{\eta_w}\right)^z$, with $x = \frac{2}{3}$, $y = -1$, $3 = 0$, $8F = (1.82 \log Re - 1.64)^{-2}$	Petukhov
,,	Overcrit. He	$0.0259\ Re^{0.8} Pr^{0.4} \cdot \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{0.716}$	Arkharov [1f]
,,	Liquid He and H_2	$0.045\ Re^{0.8} Pr^{0.4} \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{0.55} \left(\frac{d_{eq}}{L}\right)^{0.15}$	Wolf, McCarthy
,,	H_2 liquid	$\frac{0.0205 Pr^{1/3}}{Re^{0.2}} \frac{L\dot{M}}{\eta_b} \left[1 + \left(\frac{d_{eq}}{L}\right)^{0.75}\right] \left(\frac{\eta_w}{\eta_b}\right)^{0.14}$	Clark
,,	H_2 liquid	$0.021\ Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{0.575} \left(1 + \frac{6 d_{eq}}{L}\right)$	Wright, Walters
,,	Overcrit. H_2	$0.0217\ Re^{0.8} Pr^{0.4} \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{0.34}$	Thomson, Geery
,,	Overcrit. H_2	$0.023\ Re^{0.8} Pr^{5.4} \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{0.57 - 1.59 d_{eq}/L}$	Arkharov [1f]
,,	Overcrit. N_2	$0.021\ Re^{0.8} Pr^{0.4} \left(\frac{T_b}{T_w}\right)^{1/2}$	Arkharov [1f]
,,	Cryogenical fluids	$0.023\ Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\eta_b}{\eta_w}\right)^{0.14}$	Lenfestey
,,	,,	$0.023\ Re^{0.3} Pr^{0.4} \left(\frac{Pr_b}{Pr_w}\right)^{1/4}$	Arkharov [1f]

respectively the implicite semiempirical expression:

$$Nu = \frac{Re}{8} \cdot Pr^{1/3} \cdot \log\left(\frac{Re \cdot Nu}{0.7875\, Pr^{1/4}}\right)^{-2}. \tag{11}$$

In Table 3 we synthesize the characteristics of principal semiempirical relations, which describe the convective heat transfer in specific flow regimes (flows outside pipes, biphasic flows, flows due to gravific forces, respectively in the presence of high electric fields).

4. Possibilities of theoretical interpretation of semiempirical relations which describe the convective heat transfer

In the case of fluids with constant parameters (flows in the incompressibility regime), the integration of Lyon-Petukhov equations leads to the following expressions of Nu and f (Darcy) criteria:

$$Nu = 2\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 \frac{v_z}{\tilde{v}_z}\, r^* \mathrm{d}r^*\right)\left(1 - \frac{\widetilde{\delta v_r\, \delta i}}{\partial i/\partial r} \cdot \frac{Pr}{\nu}\right)^{-1} r^*\right] \mathrm{d}r^*, \tag{12}$$

$$f = \frac{8}{Re}\left\{\int_0^1 \left[\int_{r^*}^1 r^* \left(1 - \frac{\widetilde{\delta v_z\, \delta v_r}}{\partial v_z/\partial r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^*\right] r^*\, \mathrm{d}r^{*-1}\right., \tag{13}$$

where $r^* = r/R$ (R is the cylinder radius) and v_z is the axial component of flow velocity averaged over the pipe cross section surface.

In the hypotheses of the equality of the coefficients of heat and momentum eddy diffusivities:

$$-\frac{\widetilde{\delta v_r\, \delta i}}{\partial i/\partial r} = \epsilon_t \cong \epsilon_v = -\frac{\widetilde{\delta v_z\, \delta v_r}}{\partial v_z/\partial r}, \tag{14}$$

and of the validity of Reichardt's semiempirical relations [8] concerning ϵ_v, Petukhov and Popov [9] obtained the following expressions for the similarity criteria f and Nu: $f = (1.82 \log Re - 1.64)^{-2}$, (15)

$$Nu = \frac{f}{8} \frac{Re \cdot Pr}{(1 + 3.4f) + (11.7 + 1.8\, Pr^{-1/3})\left(\frac{f}{8}\right)(Pr^{2/3} - 1)} \tag{16}$$

Since the deviations (until 10 %) between these last relations deduced by Petukhov and Popov [9] and the experimental results, are greater than those for many of the semiempirical relations presented in the previous Section, we will take into account the possibility of establishing some

Table 3

The characteristics of the main semiempirical relations corresponding to the special flow regimes

The special flow regime	Nature of the studied fluids	The semiempirical expression Nu	Authors
Flows outside pipes	Usual	$C \cdot Re^n$, where: Re — n — C (Gases) — C (Liquids) 1...4 — 0.330 — 0.891 — 0.989 4...40 — 0.385 — 0.821 — 0.911 40..4000 — 0.466 — 0.615 — 0.683 $4(10^3..10^4)$ — 0.618 — 0.174 — 0.193 $4(10^4..10^5)$ — 0.805 — 0.0239 — 0.0266 $\times Pr^{1/3}$	Knudsen, Katz
Natural flows (due to the gravifical field)	Liquid and gaseous He, H_2, N_2	$C(Gr \cdot Pr)^n$, where Wall type — $Gr.Pr$ — C — n Cylindrical — $10^3...10^9$ — 0.53 — 0.25 Cooled horizontal plates — $10^5...2 \cdot 10^7$ (laminar) — 0.54 — 0.25 $2.10^7...3 \cdot 10^{10}$ (turbulent) — 0.14 — 0.33 Cooled vertical plates — $3 \cdot 10^5...3 \cdot 10^{10}$ (laminar+turbulent) — 0.27 — 0.25	Fenster, Van Wylen Arpaci, Winer, Richards, Steward Jacobs, McAdams
Natural biphasic flows	Boiling N_2	$0.14\ Gr.Pr.Ku\left(1+\frac{0.5}{Ku}\right)^{1/3}$	Frederking, Clark
Forced biphasic flows	Boiling H_2	$(-0.21 \ln \chi - 0.549) 0.023 \left(\frac{\rho' v d_{eq}}{\eta_{lw}}\right)^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{2}{5}}$ where: $\chi = \left(\frac{1-x_v}{x_v}\right)^{0.9}\left(\frac{\eta_l}{\eta_v}\right)^{0.1}\left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{0.5}$, $\frac{1}{\rho'} = \frac{x_v}{\rho_v} + \frac{1-x_v}{\rho_l}$, $v = \dot{M}\left(\frac{x_v}{\rho_v} + \frac{1-x_v}{\rho_l}\right)$.	Hess, Kunz
Flows in strong electrical fields	Liquid Ne, N_2	$Nu(0) + a(El \cdot Pr)^n$ Fluid type — a — n Organic liquids — 3.5×10^{-4} — 1.1 Liquid N_2 — 6.8×10^{-2} — 0.4	Rutkowski, Bewilogua

correspondences between Lyon-Petukhov equations and the most accurate semiempirical relations, by substituting the Reichardt's semiempirical relations [8] concerning ϵ_v, with adequate expressions. For this, starting from the semiempirical relations, found as compatible with experimental results, and using the gradient method ([10], [4b]), one can determine the parameters of the functional expressions (of polynomial types, by rational functions, etc.) : $\frac{v_z}{\tilde{v}_z} = f(r^*)$, $\frac{\widetilde{\delta v_z\, \delta v_z}}{\partial v_z/\partial r} = g(r^*) = \epsilon_v(r^*)$, $\frac{\widetilde{\delta v_r\, \delta i}}{\partial i/\partial r} = \epsilon_j(r^*)$, obtaining so the flow velocity profile and the heat and momentum eddy diffusivities profiles for the studied flows.

If the parameters $\frac{v_z}{\tilde{v}_z}$, ϵ_v and ϵ_i are constant in respect with r^*, and $\epsilon_v = \epsilon_i$, substituting the radial similarity criterion r^* by $\frac{r}{R}$ and differentiating the Lyon-Petukhov expressions of f and Nu in respect with the pipe radius R, we obtain :

$$f = \frac{64}{Re}\left(1 + \frac{\epsilon_v}{\nu_{wall}}\right), \tag{17}$$

$$Nu = 8\left(1 + \frac{\epsilon_i}{\nu} \cdot Pr\right)_{wall} = 8\left[1 + Pr\left(\frac{f \cdot Re}{64} - 1\right)\right]. \tag{18}$$

One finds that, in the case of laminar regime ($\epsilon_v = 0$), the deduced expression (17) leads to the Poiseuille-Hagen expression : $f = \frac{64}{Re}$ (in good agreement with the experimental results), and to the Norris-Streid value $Mu = 8$ (which is of the magnitude order of the experimental values, respectively of the evaluated values by other semiempirical relations corresponding to laminar flow regime). In the case of turbulent flows, the relations deduced above allow the evaluations of the deviations of the computed values (in the above hypotheses) of Nusselt criterion from the experimental values :

$$\left(\frac{\Delta Nu}{Nu}\right)_{\%} = \frac{800}{Nu}\left[1 + Pr\left(\frac{f \cdot Re}{64} - 1\right)\right] - 100. \tag{19}$$

In the conditions for which the deviations given by this expression are enough small, the hypotheses of the theoretical model described above being thus acceptable, the introduction of experimental values (expressed sometimes by certain semiempirical relations) of f and Nu in the above expressions, allows us the estimation — by the gradient met-

hod – of the dependence of the reduced coefficient of momentum eddy diffusivity $\frac{\epsilon_v}{\nu}$ on the Re and Pr similarity criteria.

We specify that among the relations obtained from Lyon-Petukhov equations, which we found to be in a sensibly better concordance with the experimental results than Petukhov-Popov expressions [9], there are the expressions :

$$Nu = F \cdot Pr^x \left[1 + 27.2F + (11.7 + 1.8\,Pr^{-1/3})\,F^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)\right]^y \left(\frac{\eta_b}{\eta_w}\right)^z, \quad (20)$$

with $x = \frac{2}{3}, y = -1, z = 0.14$, or $x = y = 0, z = 0.14$, respectively :

$$\frac{1}{\sqrt{8F}} = -2\log\left[\frac{2.51}{Re\sqrt{8F}} + \frac{h}{3.71d}\right], \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{8F}} = -2\log\left[\frac{2.51}{Re\sqrt{8F}} + \frac{h.Pr^{2/3}}{3.71\,d}\right], \quad (22)$$

or :

$$\frac{1}{\sqrt{8F}} = -1.9\log\left[\left(\frac{6.75}{Re}\right)^{0.9} + \left(\frac{h.Pr^{2/3}}{3.75\,d)}\right)^{1.05}\right]. \quad (23)$$

Conclusions

The effected study points out the possibility of establishing some direct correspondences between the rigorous theoretical models of convective heat transfer, and the semiempirical relations inferred starting from the experimental results. The analysis of these correspondences allows to obtain some additional informations concerning the flow regime (particularly, the expressions of $\frac{\epsilon_v}{\nu} = f(Re, Pr)$ dependences), being also important for scientific foundation of some relations frequently used in the design of thermotechnical equipments (particularly cryogenical, of installations in buildings, etc.),

REFERENCES

1. a) *J. A. Clark*, "Heat Transfer", in "Cryogenic Technology", R. W. Vance ed., p. 121–95, J. Wiley Sons, 1963 ; b) *J. A. Clark*, "Cryogenic Heat Transfer", in Adv. Heat Transfer, vol. 5, p. 325–517, Acad. Press, New York, 1968 ; c) *A. G. Lenfestey*, "Heat Transfer and Fluid Flow", in Adv. Cryogenics, p. 155–81, C. A. Bailey rd., Plenum Press, London, New York, 1971 ; d) *C. Stamatescu ş. a.*, „Tehnica frigului", vol. 2, Ed. tehn., Bucharest, 1979 ; e) *A. Davidescu, H. Mucica*, „Schimbul de căldură în instalaţiile industriale", Ed. tehn., Bucharest, 1964 ; f) *A. Arharov, I. Marfenina, E. Mikulin* "Theory and Design of Cryogenic Systems", Ed. Mir, Moscow, 1981.
2. a) *L. D. Landau, E. M. Lifschitz* „Mécanique des fluides", Ed, Mir, Moscow, 1971 ; b) *P. Brădeanu*, „Mecanica fluidelor", Ed. tehn., Bucharest, 1973.

3. a) *R. N. Lyon*, Chem. Eng. Progr., 47, nr. 2 (1951); b) *B. S. Petukhov* „Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties", in Adv. Heat Transfer, vol. 6, ed. J. P' Hartnett, T. F. Irvine, Acad. Press, 1970, p. 503—75.
4. a) *A. A. Gukhman*, "Introduction to the Theory of Similarity", Acad. Press, New York, 1965; b) *D. Iordache* „Noţiuni şi metode generale ale fizicii", Polytechn. Inst. Bucharest, 1980.
5. a) *J. Rutkowski*, Cryogenics, 17 (4) 242 (1977); b) ibid., 20 (1) 75 (1980); c) *L. Bewilogua, R. Kröner*, Cryogenics, 22 (7) 419 (1980).
6. a) *V. Iancu, D. Iordache, T. Pop, L. Daniello, A. Rado, E. Sava*, Intercryolep Scient. Symp. works, Poiana Braşov, 1981; b) ibid., Bull. Polytechn. Inst. Bucharest, Electr. S., vol. 46—47, p. 33—45 (1984—85)
7. a) *F. Bosnjakovics*, "Technische Thermodynamik", Verlag Th. Steinkopff, Dresden, 1965, vol. 1; b) *A. F. Colburn*, Trans. Am. Inst. Chem. Eng., 29, 184 (1933); c) *P. Perroud J. Rebière, L. Weil*, "Convection forcée de l'azote et de l'hydrogène liquide", in "Pure and Applied Cryogenics", vol. 4, p. 155—171, Pergamon Press, Oxford, 1966.
8. *H. Reichardt*, Arch. Ges. Warmetechnik 6/7, 129 (1951).
9. *B. S. Petukhov, V. N. Popov*, Teplofiz. Visok. Temp. (High Temperature Heat Physics) vol. 1, nr. 1 (1963).
10. *I. Levenberg*, Quart. Appl. Math., 2, 164 (1944).

Probleme fizice implicate în proiectarea cablurilor criogenice V. Posibilităţi de interpretare teoretică a relaţiilor semiempirice care descriu schimbul termic convectiv

Pornind de la analiza relaţiilor teoretice riguroase care descriu schimbul termic convectiv între fluidele „agent termic" şi corpurile a căror temperatură trebuie adusă între anumite limite, au fost studiate criteriile şi domeniile de similitudine, precum şi relaţiile semiempirice care permit descrierea schimbului termic convectiv în diferite condiţii. Posibilitatea de a stabili o corespondenţă între ecuaţiile Lyon-Petuhov şi anumite relaţii semiempirice a fost de asemenea analizată.

C.Z.: 621.317:621.52

STAND PENTRU DETERMINAREA RATEI DE PIERDERE A VIDULUI ÎN CAMERELE DE STINGERE

GH. HORTOPAN*

Se prezintă considerațiile teoretice care au stat la baza elaborării unui stand de încercări pentru verificarea presiunii (vidului) în camerele de stingere folosite în tehnica curenților intenși. În acest sens se dimensionează sursele de curent intens și de tensiune înaltă ale dispozitivului tip magnetron. Oscilogramele curentului de descărcare arată performanțele standului de a măsura curenți de descărcare în limitele 2 μA ... 800 μA.
În anexă se prezintă aspecte reprezentative privind traiectoria electronilor în cîmp electric și în cîmp magnetic.

Introducerea comutației în vid avansat pe scară largă în domeniul tensiunilor medii și a celor joase, în condiții grele de exploatare, are drept urmare dezvoltarea unei tehnici noi de încercări în fabricație și în exploatarea aparatelor de comutație echipate cu camere de stingere în vid. Într-adevăr controlul vidului se efectuează individual, pentru fiecare cameră de stingere care intră în componența aparatului de comutație.

Domeniul vidului realizat în camerele de stingere este cuprins între 10^{-10} bar și 10^{-7} bar, iar rata pierderii vidului este apreciată la 10^{-17} pînă la 10^{-14} m bar l/s [1]. În aceste condiții se apreciază că viața unei camere de stingere este de 10 ... 20 ani.

Aprecierea menținerii vidului în limite admise poate fi făcută cantitativ și calitativ. Aprecierea cantitativă se bazează pe existența unei curbe de etalonare presiune-curent de descărcare și măsurarea curentului în două etape: o dată la închiderea camerei de stingere și o dată după depozitarea camerei de stingere pe o durată de 30 zile. De asemenea este necesar cu utilizatorul să verifice presiunea internă, în camere de stingere, dacă aparatul a fost depozitat (în stare de nefuncționare) o durată îndelungată. În fapt, dacă o cameră de stingere a fost realizată în bune condiții tehnologice, funcționarea conduce la o îmbunătățire a vidului prin efectul de adsorbție pe care îl are orice descărcare în interiorul camerei de stingere. Pe această idee se bazează controlul calitativ al unei camere de stingere, chiar dacă *nu se dispune de o* curbă de etalonare presiune-curent.

* Prof. dr. ing., catedra Măsuri și aparate electrice

1. Principiul de funcționare a standului

Camera de stingere, cu piesele de contact separate (4 ... 5 mm), se află în cîmpul magnetic creat de o bobină parcursă de curent continuu. Se aplică brusc tensiunea de 5 kV între piesele de contact. Ca urmare ia naștere, în camera de stingere, o descărcare neautonomă care, în exteriorul camerei de singere, se manifestă printr-un curent electric înregistrabil cu ajutorul unui osciloscop cu persistență. Valoarea inițială maximă, a acestui curent, constituie un indiciu asupra nivelului de vid realizat în camera de stingere [2], [3]. Aplicarea simultană a cîmpului electric și a celui magnetic are drept scop de a crește parcursul mediu liber al electronului și deci de a crește probabilitatea ionizării prin șoc a moleculelor de gaz existente în camera de stingere. Altfel măsurarea presiunii în mod direct, la un vid avansat de ordinul 10^{-10} . . . 10^{-7} bar, necesită un vacuummetru de tip Alpert-Bayard, a cărui funcționare se bazează pe efectul Penning [4].

2. **Descărcarea neautonomă.** În teoria cinetică a gazelor se demonstrează că parcursul mediu liber al unei particule (electron, ion, moleculă) este o funcție de raza cinetică r, de temperatura și presiunea la care se află particula. Pentru molecule și atomi de același gaz [5], [7] pentru parcursul mediu liber este valabilă relația :

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}pr^2} = 7{,}8 \cdot 10^{-25} \frac{T[K]}{p[Pa]r^2[m^2]} \tag{1}$$

cu notațiile

$\bar{\lambda}$ — parcursul mediu liber [m]
k — $1{,}38 \cdot 10^{-23}$, W s grd^{-1}, constante Boltzmann
p — presiunea, [Pa]
r — raza cinetică, [m].

Pentru ioni de gaz de aceeași natură

$$\bar{\lambda}_i = \sqrt{2}\,\bar{\lambda} \tag{2}$$

iar pentru electroni

$$\bar{\lambda}_e = 4\sqrt{2}\,\bar{\lambda} \tag{3}$$

Într-o cameră de stingere se află, pe lîngă molecule și atomi de gaz neutre și ioni pozitivi și electroni rezultanți din acțiunea ionizatorilor (raze cosmice, raze ultraviolete, raze X). Presiunea în camera de stingere se situează între limitele 10^{-10} bar și 10^{-7} bar. Pentru acest interval de presiuni parcursul mediu al electronului este [5, 6] cuprins între 0,05 m și 40 m, iar distanța între piesele de contact este de 1 mm la aparate cu tensiunea nominală de 1 kV și 22 mm la aparate cu tensiunea nominală de 24 kV. Ca urmare se exclude posibilitatea ionizării prin șoc pentru orice intensitate a cîmpului electric care ar exista în zona spațială dintre piesele de contact. O posibilitate de a crea o multiplicare a purtătorilor de sarcină, prin efectul de ionizare prin șoc este de a imprima electronilor

(mult mai mobili decît ionii de gaz) o traiectorie mai lungă decît parcursul mediu liber. Această cerință este îndeplinită dacă asupra unui purtător de sarcină q, în speță asupra electronului pentru care $q = -e$, se exercită forța Lorentz generalizată :

$$\bar{F} = q[\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}]$$

Lungirea traiectoriei electronului este posibilă prin alegerea convenabilă a direcției și sensurilor vectorilor $\bar{E}$ și $\bar{B}$, observînd că vectorul viteză inițială ($\bar{v} = \bar{v}_0$) poate fi orientat oricum fiind o mărime probabilistică.

În figura 1 se prezintă o secțiune într-o bobină 1 în care este introdusă o cameră de stingere 2 cu piesele de contact 3 și 4. Este convenabil ca în zona centrală vectorii $\bar{E}$ și $\bar{B}$ să fie paraleli. În acest caz electronul va descrie o traiectorie sub formă de elice cu pas mereu scurtat după cum se arată în anexa 1, relațiile (61), (62), (63) cu reprezentarea grafică din figura 13, dacă viteza inițială v_0 este siuată ntr-un plan tangent la un cilindru coaxial cu piesele de contact. Dacă vectorii $\bar{E}$ și $\bar{B}$ sînt antiparaleli traiectoria electronului, în condițiile menționate, este o elice cu pas mereu crescător după cum se demonstrează în anexa 1, relațiile (64), (65), (66).

În figura 2 se prezintă calitativ traiectoria electronilor sub forma unei cicloide în zona din imediata apropiere a pieselor de contact, considerate cilindrice, vectorii $\bar{E}$ și $\bar{B}$ fiind perpendiculari. Relațiile care descriu formele cicloidelor posibile sînt prezentate în anexa 1 și anume (170), (71), (72) cu reprezentările grafice din figura 14. Cele două traiectorii (elice cu pas mereu scurtat și cicloidă) sînt cazuri reprezentatative pentru orientări bine precizate ale vectorilor $\bar{v}_0$, $\bar{B}$, $\bar{E}$. În anexa 1 sînt prezentate și alte traiectorii corespunzătoare unor situații reprezentative. Este de menționat faptul că ionii pozitivi descriu o traiectorie puțin modificată de prezența inducției magnetice $\bar{B}$; ei se deplasează sub acțiunea cîmpului electric $\bar{E}$. Se poate considera deci că, în exteriorul camerei de stingere, se poate măsura un curent. Rolul electronilor, prin creșterea parcursului

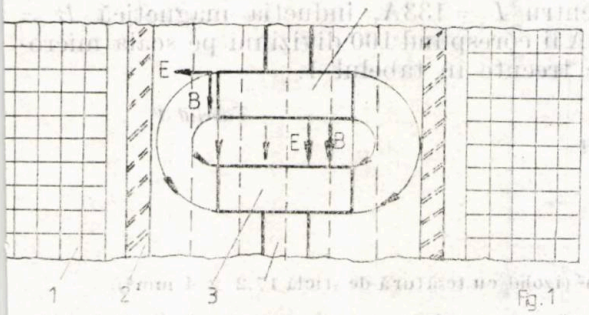


Fig. 1

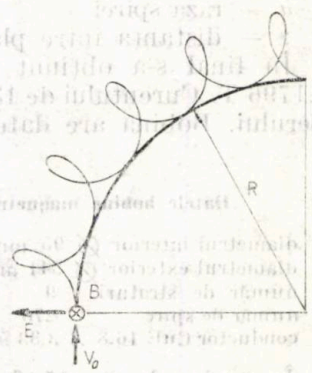


Fig. 2

Fig. 1. Secțiune longitudinală în camera de stingere supusă încercării. 1 — bobine, 2 — anvelopa camerei de stingere 3,4 — piese de contact.

Fig. 2. Traiectoria cicloidală la periferia pieselor de contact

mediu liber este de a genera purtători de sarcină (ionizare prin șoc). Numărul acestor purtători de sarcină este limitat din cauza presiunii reduse (10^{-10} ... 10^{-7} bar) în camera de stingere și ca urmare descărcarea este neautomată. Curentul măsurat în circuitul exterior scade mereu pînă la valoarea zero. Prezentarea traiectoriei pentru cîmpul electric $\bar{E} = 0$ și inducția magnetică $\bar{B} \neq 0$ nu suscită interes căci în acest caz nu s-ar produce o vehiculare a purtătorilor de sarcină către piesele de contact.

3. **Schema electrică de principiu.** Această schemă, prezentată în figura 3, cuprinde echipamentul necesar producerii curentului de excitație în bobina magnetron BM, în care se introduce camera de stingere, X, sursa de tensiunea înaltă care se aplică la bornele camerei de stingere,cu contactul deschis și modulul de testare a pragului de curent MTP.

3.1. *Bobina magnetron.* Pentru a dimensiona bobina magnetron BS este necesar a se cunoaște inducția magnetică pe axa bobinei, în centrul bobinei, adică în zona în care apare intervalul disruptiv al camerei de stingere supuse încercării. O indicație în această direcție este dată de unele firme privind inducția magnetică în pompele ionice [7, 8]. Valoarea acestei inducții este cuprinsă între 0,1 și 0,2 T. În aceste pompe se urmărește getterizarea ionilor de gaz pe plăci și în pulbere de titan. Procesul fizic este similar atît în pompa ionică cît și în standul pentru verificarea vidului în camerele de stingere. Și în pompa ionică intensitatea curentului de descărcare constitue un indiciu asupra vidului realizat în pompă. Plecînd de la această idee s-a optimizat construcția bobinei în sensul obținerii inducției magnetice maxime cu o masă dată de conductor de bobinaj [9]. Inducția magnetică în axa bobinei, rezultată din superpoziția efectelor produse de fiecare spiră în parte, s-a calculat cu relația: [10].

$$B_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{5}$$

unde s-a notat:

i — intensitatea curentului electric
a — raza spirei
z — distanța între planul spirei și punctul de calcul.

În final s-a obținut pentru $I = 133$A, inducția magnetică $B = 0{,}1796$ T. Curentului de 133A îi corespund 100 diviziuni pe scala microamperului. Bobina are datele trecute în tabelul 1.

Tabelul 1

Datele bobine magnetroni

diametrul interior	∅ 95 mm
diametrul exterior	∅ 341 mm
număr de straturi	9
număr de spire	270

conductor CuE 16,8 × 3,33 mm² (izolat cu țesătură de sticlă 17,2 × 4 mm²).

În regim de scurtă durată curentul mai poate fi majorat pînă la 520 A. Instrumentul indicator este un microampermetru de 250 μA. cu rezistența internă de 250 Ω conectat la un șunt 400 A/75 mV. Curentul de excitație este filtrat de inductivitatea bobinei magnetron (L_{BM} =

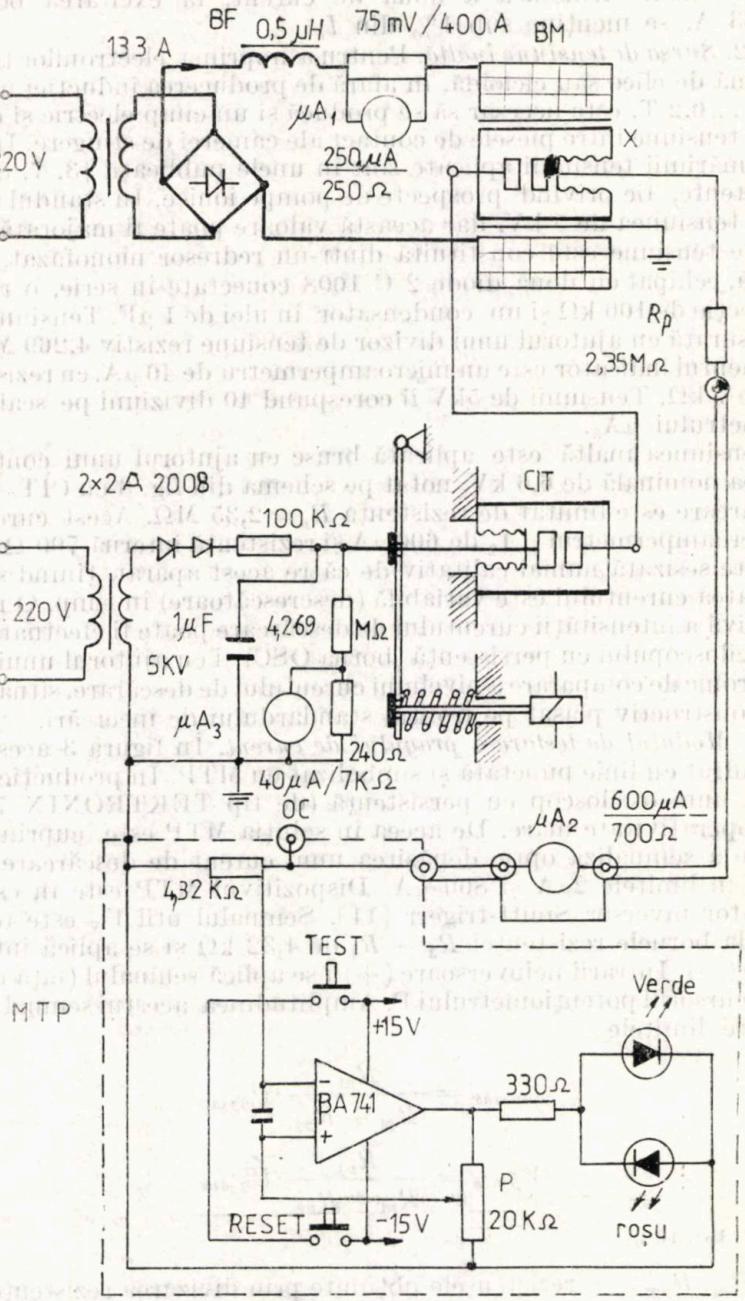


Fig. 3. Schema electrică a standului de încercări

= 8,812 mH) și de o inductivitate unei bobine cu miez de fier *BF* cu $L_{BF} = 0{,}5$ mH. Armonica a doua de curent, la excitarea bobinei cu $I_n = 133$ A, se menține sub 1% din I_n.

3.2. *Sursa de tensiune înaltă.* Pentru a imprima electronilor traiectorii sub formă de elice sau cicloidă, în afară de producerea inducției magnetice de 0,1 ... 0,2 T, este necesar să se producă și un cîmp electric și deci să se aplice o tensiune între piesele de contact ale camerei de stingere. Informații asupra mărimii tensiunii aplicate sînt în unele publicații [3, 7, 8] fie privind patente, fie privind prospecte de pompe ionice. În standul construit s-a ales tensiunea de 5 kV, dar această valoare poate fi majorată la 6 kV. Sursa de tensiune este constituită dintr-un redresor monofazat, monoalternanță, echipat cu două diode 2 C 1008 conectate în serie, o rezistență de protecție de 100 kΩ și un condensator în ulei de 1 μF. Tensiunea înaltă este măsurată cu ajutorul unui divizor de tensiune rezistiv 4,269 MΩ/240Ω. Instrumentul indicator este un microampermetru de 40 μA, cu rezistența internă de 7 kΩ. Tensiunii de 5kV îi corespund 40 diviziuni pe scala microampermetrului μA_3.

Tensiunea înaltă este aplicată brusc cu ajutorul unui contactor cu tensiunea nominală de 6,6 kV, notat pe schema din fig. 3 cu CIT. Curentul de descărcare este limitat de rezistența $R_p = 2{,}35$ MΩ. Acest curent trece prin microampermetrul μA_2 de 600 μA și rezistență internă 700 Ω. Descărcarea este sesizată numai calitativ de către acest aparat, ținînd seama că intensitatea curentului este variabilă (descrescătoare) în timp. O măsurare cantitativă a intensității curentului de descărcare poate fi efectuată cu ajutorul osciloscopului cu persistență (borna OSC) și cu ajutorul unui dispozitiv electronic de comparare a nivelului curentului de descărare, situat într-un modul constructiv plasat pe frontul standardului de încercări.

3.3. *Modulul de testare a pragului de curent.* În figura 3 acest modul este încadrat cu linie punctată și simbolizat cu MTP. În producție curentă folosirea unui osciloscop cu persistență (de tip TEKTRONIX 7613) nu oferă o operativitate mare. De aceea în soluția MTP este cuprinsă ideea logică de a semnaliza optic depășirea unui curent de descărcare selectat anterior în limitele 2μA și 800 μA. Dispozitivul MTP este în esență un comparator inversor Smitt-trigerr [11]. Semnalul util V_N este tensiunea culeasă la bornele rezistenței $R_3 + R_4$ de 4,32 kΩ și se aplică intrării inversoare (−). Intrării neinversoare (+) i se aplică semnalul (față de masă) cules de cursorul potențiometrului P. Amplitudinea acestui semnal V_p variază, între limitele

$$V_{p\,max} = \frac{R_{p1}}{R_{p1} + R_{p2}} \cdot U_{2\,max} \tag{6}$$

$$V_{p\,min} = \frac{R_{p1}}{R_{p1} + R_{p2}} \cdot U_{2\,min} \tag{7}$$

unde s-a notat:

— R_{p1}, R_{p2}, rezistențele obținute prin divizarea rezistenței totale a potențiometrului P(20 kΩ), cu ajutorul cursorului,

— $U_{2\,max}$, $U_{2\,min}$, tensiunea maximă (pozitivă) și minimă (negativă) la ieșirea din amplificatorul operațional βA 741.

Tensiunea de diferență $U_D = V_p - V_n$, după semnul ei, determină bascularea polarității semnalului de ieșire între limitele $U_{2\,max}$ și $U_{2\,min}$. Dioda luminescentă verde va conduce (emite lumină) dacă nu s-a depășit pragul de curent, iar dioda roșie rămîne stinsă. La depășirea pragului de curent dioda roșie emite lumină și se stinge dioda verde.

Dispozitivul MTP este etalonat ca funcție $i = f(n)$ unde i este intensitatea curentului de descărcare, iar n este numărul de ture reglat al potențiometrului P, ca în figura 4. [12]. Dispozitivul MTP mai este echipat cu un buton de testare (TEST) și altul de aducere în stare de funcționare (RESET).

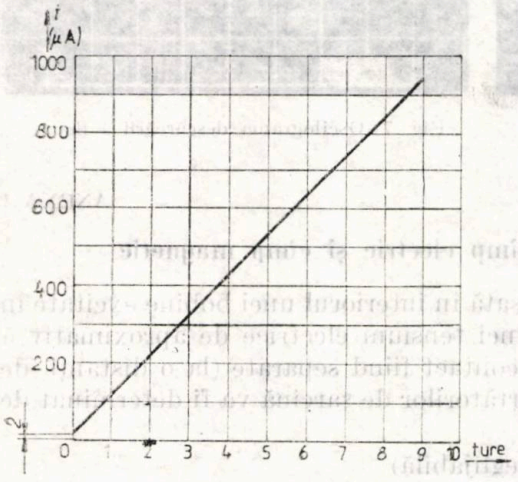


Fig. 4. — Diagrama de etalonare $i = f(n)$ a potențiometrului P din fig. 3 și 10.1 din panoul frontal.

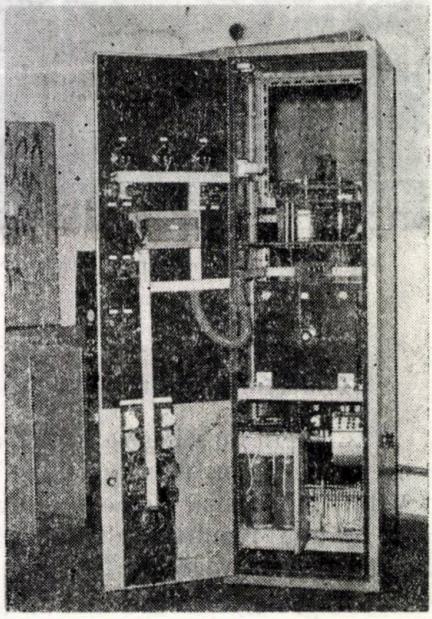


Fig. 5. Fotografia standului construit

4. Rezultate experimentale

Fotografia standului construit în IPB este dată în figura 5. Un panou standardizat 600 × 600 × 2 000 cuprinde întreg echipamentul schemei prezentate în figura 3.

S-au efectuat experimentări asupra camerei de stingere SUPERVAC de 3,3/6,6 kV, 300 A, care a fost depozitată aproximativ 3 ani fără a fi fost utilizată. La prima încercare (descărcare) s-a obținut oscilograma din figura 6 cu un curent maxim de 124,4 μA. Se observă diminuarea continuă a intensității curentului, ca urmare a faptului că descărcarea este neautonomă. În figura 7 se prezintă oscilograma descărcării a doua, care a urmat primei descărcări după aproximativ 10 minute.

Se constată că intensitatea curentului s-a redus la 41,6 μA. Reducerea intensității curentului se datorează fenomenului de adsorbție a moleculelor de gaz (ionii pozitivi care pierd sarcina electrică ajungînd la polul

minus) ca și efectului de getter din camera de stingere. Acest tip de cameră de stingere este getterizată. Faptului că la a doua descărcare curentul a diminuat confirmă calitatea bună a camerei de stingere în ce privește conservarea vidului.

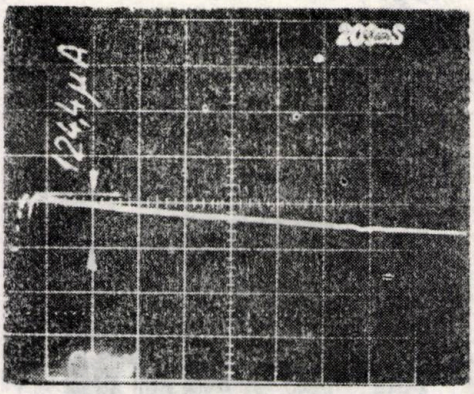


Fig. 6. Oscilograma primei descărcări

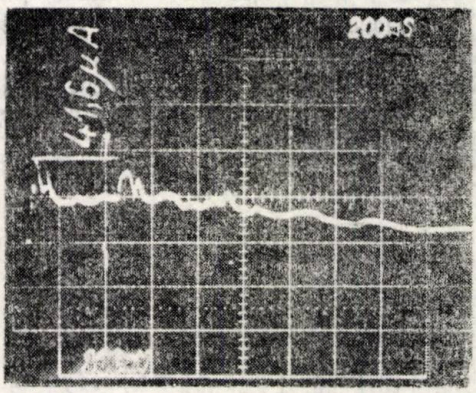


Fig. 7. Oscilograma descărcării a doua

ANEXA 1

Traiectoria electronilor în cîmp electric și cîmp magnetic

Camera de stingere fiind plasată în interiorul unei bobine excitate în curent continuu, prin aplicarea unei tensiuni electrice de aproximativ 5 kV între electrozi, elementele de contact fiind separate (la o distanță de 3 ... 5 mm) rezultă că drumul purtătorilor de sarcină va fi determinat de acțiunea următoarelor forțe :

Forța gravitațională $\bar{F}_g$ (neglijabilă)

Forța Lorentz $\bar{F}_L = q[\bar{v} \times \bar{B}]$ (8)

Forța de inerție $\bar{F}_i = m \dfrac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}$

Forța dezvoltată în cîmp electric $\bar{F}_e = q\bar{E}$

Sarcina q conține și semnul purtătorului de sarcină. Relațiile (8) sînt scrise în sistemul SI, iar m este masa purtătorului de sarcină în repaus. Din cauza masei mari a ionilor pozitivi viteza lor este redusă și ca urmare acțiunea forței Lorentz este nesemnificativă, ionii pozitivi se vor deplasa sub acțiunea cîmpului electric existent între elementele de contact. Dacă tensiunea între piesele de contact rămîne sub $U = 30$ kV, în ecuațiile (8) masa rămîne aceea din repaus. Dacă însă această tensiune depășește sensibil 30 kV energia eU imprimată electronului este considerabilă și rezultă că este oportun ca, în relațiile (8), să se considere m ca fiind masa relativistă. Cum în instalația de verificare a camerelor de stingere tensiunea între piesele de contact rămîne sub 6 kV rezultă că forța de inerție este dată de mecanica Newton-iană [6].

1. Ecuațiile diferențiale generale

Rolul electronilor este de a produce ionizarea prin șoc datorită creșterii considerabile a parcursului mediu liber. Deci, dacă se urmărește să se determine traiectoria electronilor ($q = -e$) din relațiile (8) rezultă :

$$-e[\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}] = m \frac{d\bar{v}}{dt} \tag{9}$$

Cum sarcina e a electronului și masa m în repaus sînt mărimi constante ecuația (9) se poate scrie sub forma

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -k[\bar{E} + (\bar{v} \times \bar{B})] \tag{10}$$

unde $k = e/m$. Ecuația (10) are un caracter general. Urmărirea traiectoriei se poate face prin alegerea unui sistem de coordonate (carteziene sau cilindrice). Scrierea în coordonate carteziene are semnificație fizică pentru zonele în care direcția cîmpului electric este perpendiculară pe aceea a cîmpului magnetic adică în afara zonei centrale cuprinsă între piesele de contact. Scrierea în coordonate cilindrice este oportună pentru zona centrală cuprinsă între piesele de contact.

În coordonatele carteziene ecuația (10) devine :

$$\ddot{x} = -k(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \tag{11}$$

$$\ddot{y} = -k(E_y + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z) \tag{12}$$

$$\ddot{z} = -k(E_z + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) \tag{13}$$

cu explicații în figura 8, în care s-au marcat componentele $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ și B_x, B_y, B_z.

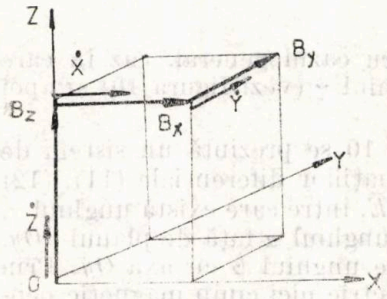


Fig. 8. Relativ la relațiile (11), (12), (13)

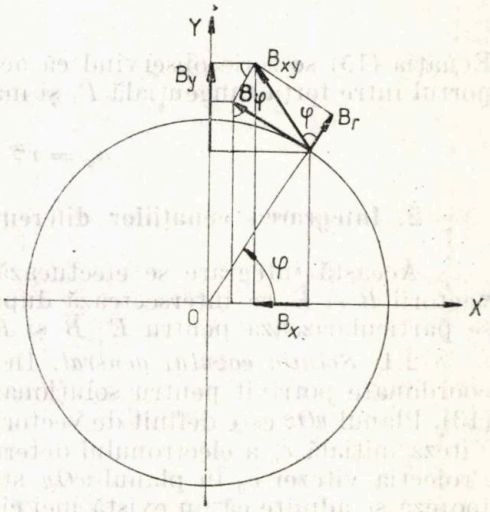


Fig. 9. Relativ la relațiile (13) și (16)

În coordonatele cilindrice ecuația (10) devine

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -k(E_r - B_\varphi \dot{z} + B_z r\dot{\varphi}) \tag{14}$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -k(E_\varphi - B_z \dot{r} + B_r \dot{z}) \tag{15}$$

$$\ddot{z} = -k(E_z - B_r r\dot{\varphi} + B_\varphi \dot{r}) \tag{16}$$

Trecerea de la ecuațiile (13) la ecuațiile (16) se realizează cu relațiile de transformare :

$$x = r\cos\varphi\,;\quad y = r\sin\varphi\,;\quad z = z \tag{17}$$

$$B_\varphi \cos\varphi + B_r \sin\varphi = B_y \tag{18}$$

$$B_\varphi \sin\varphi - B_r \cos\varphi = -B_x \tag{19}$$

$$B_z = B_z \tag{20}$$

Legătura între componentele vectorului $\bar{B}$ în coordonate carteziene și componentele în coordonate cilindrice, descrisă de relațiile (18), (19), (20) se observă cu ajutorul figurii 9, în care s-a desenat proiecția vectorului $\bar{B}$ în planul xOy ; această proiecție notată cu $\bar{B}_{xy}$ se descompune într-o componentă tangențială $\bar{B}_\varphi$ și una radială $\bar{B}_r$. Componentele vectorului $\bar{B}$ în coordonate cilindrice sînt $\bar{B}_\varphi$, $\bar{B}_r$ și $\bar{B}_z$. Ecuația (14) se scrie observînd că în mecanica Newton — iană, accelerația radială are expresia :

$$a_r = \ddot{r} - \frac{v^2}{r} = \ddot{r} - r\dot{\varphi} \tag{21}$$

Ecuația (15) se scrie observînd că accelerația tangențială se scrie ca raportul între forța tangențială $\bar{F}_t$ și masa m și are ca expresie [6] :

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \tag{22}$$

2. Integrarea ecuațiilor diferențiale

Această integrare se efectuează pentru cazul general, caz în care vectorii $\bar{B}$ și $\bar{E}$ se intersectează după unghiul γ (vezi figura 10) și apoi se particularizează pentru $\bar{E} \parallel \bar{B}$ și $\bar{E} \perp \bar{B}$.

2.1. *Soluția cazului general.* În figura 10 se prezintă un sistem de coordonate potrivit pentru soluționarea ecuațiilor diferențiale (11), (12) (13), Planul yOz este definit de vectorii $\bar{B}$ și $\bar{E}$, între care există unghiul γ. Viteza inițială $\bar{v}_0$ a electronului determină junghiul α față de planul xOy. Proiecția vitezei $\bar{v}_0$ în planul xOy stabilește unghiul β cu axa Oy. Prin ipoteză se admite că nu există nici cîmp electric nici cîmp magnetic pentru $z < 0$; electronul pătrunde în cîmpul electromagnetic în punctul

de coordonate $x = y = z = 0$. În spațiul pentru care $z > 0$ nu există alți purtători de sarcină. În aceste condiții componentele vectorilor $\bar{E}$ și $\bar{B}$ sînt următoarele :

$$E_x = 0\,; \quad E_y = E \sin\gamma\,;$$

$$E_z = E \cos\gamma\,; \quad B_x = 0\,; \qquad (23)$$

$$B_y = 0\,; \quad B_z = B$$

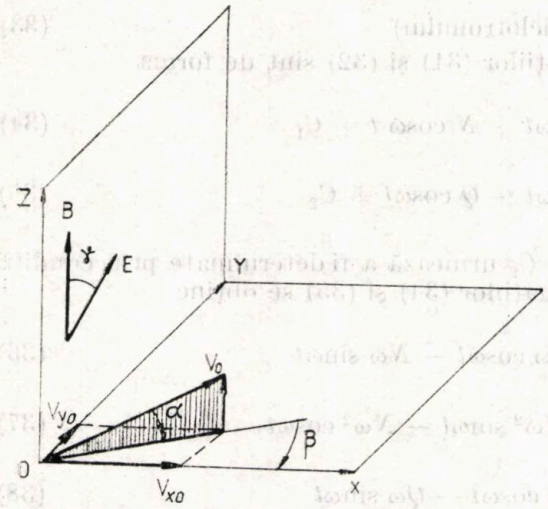


Fig. 10. Stabilirea sistemului de coordonate

Componentele vitezei $\bar{v}_0$ sînt :

$$\dot{x}_0 = v_{x0} = v_0 \cos\alpha \cos\beta$$

$$\dot{y}_0 = v_{y0} = v_0 \cos\alpha \sin\beta$$

$$\dot{z}_0 = v_z = y_0 \sin\alpha \qquad (24)$$

Cu aceste precizări ecuațiile (11), (12), (13) devin

$$\ddot{x} = -kv_0 \cos\alpha \sin\beta \cdot B = -k\dot{y}B \qquad (25)$$

$$\ddot{y} = -k(E \sin\gamma - v_0 \cos\alpha \cos\beta \cdot B) = -k(E_y - \dot{x}B) \qquad (26)$$

$$\ddot{z} \quad -k \cdot E \cos\gamma = -kE_z \qquad (27)$$

Pentru soluționarea ecuațiilor (25) și (26) se face următoarea schimbare de variabilă.

$$x = x_1 + \frac{E}{B} \sin\gamma \cdot t \qquad (28)$$

adică sistemul inițial de coordonate se deplasează cu viteza uniformă $\frac{E}{B}$ $\sin\gamma$ în lungul axei x, în raport cu noul sistem de coordonate. Prin derivarea ecuației (28) se obține :

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \frac{E}{B} \sin\gamma \qquad (29)$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 \qquad (30)$$

Cu notațiile din relația (29) relația (26) devine

$$\ddot{y} = kB\dot{x}_1 = \omega\dot{x}_1 \qquad (31)$$

iar ecuația (25) se conservă :

$$\ddot{x}_1 = -kB\dot{y} = -\omega\dot{y} \tag{32}$$

cu notația $\omega = kB$ (pulsația ciclotronului) (33)

Soluțiile generale ale ecuațiilor (31) și (32) sînt de forma

$$x_1 = M\sin\omega t + N\cos\omega t + C_1 \tag{34}$$

$$y = P\sin\omega t + Q\cos\omega t + C_2 \tag{35}$$

unde mărimile M, N, C_1, P, Q, C_2 urmează a fi determinate prin condiții la limită. Prin determinarea ecuațiilor (34) și (35) se obține

$$\dot{x}_1 = M\omega\cos\omega t - N\omega\sin\omega t \tag{36}$$

$$\ddot{x}_1 = -M\omega^2\sin\omega t - N\omega^2\cos\omega t \tag{37}$$

$$\dot{y} = P\omega\cos\omega t - Q\omega\sin\omega t \tag{38}$$

$$\ddot{y} = -P\omega^2\sin\omega t - Q\omega^2\cos\omega t \tag{39}$$

Prin introducerea relațiilor (37) și (38) în relația (32) și pentru $t = 0$ se obține

$$N = P \tag{40}$$

Prin introducerea relațiilor (36) și (39) în relația (31) și pentru $t = 0$ se obține :

$$M = -Q \tag{41}$$

Se observă că, în momentul $t = 0$, mișcarea electronului nu este încă inițiată și deci $x_1 = 0$ și $y = 0$, astfel încît din relațiile (34) și (35) se obține :

$$N = -C_1 = -P \tag{42}$$

$$Q = -C_2 = M \tag{43}$$

Cu datele din relațiile (40) ... (43) și trecerea la sistemul inițial de coordonate se obține :

$$x = M\sin\omega t - P(1 - \cos\omega t) + \frac{E}{B}\sin\gamma \cdot t \tag{44}$$

$$y = P\sin\omega t + M(1 - \cos\omega t) \tag{45}$$

Pentru determinarea mărimilor M și P se derivează expresiile (44) și (45), cu observația ca $\dot{x}_0 = v_{x0}$ și $\dot{y}_0 = v_{y0}$. Se obține

$$M = \frac{v_{x0}}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\sin\gamma \tag{46}$$

$$P = \frac{v_{y0}}{\omega} \tag{47}$$

Cu valorile pentru M și P din relațiile (46) și (47) introduse în relațiile (44) și (45) se cbțin proiecțiile traiectoriei în planul xOy :

$$x = \left(\frac{v_{x0}}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\sin\gamma\right)\sin\omega t - \frac{v_{y0}}{\omega}(1 - \cos\omega t) + \frac{E}{B}\sin\gamma \cdot t \tag{48}$$

$$y = \frac{v_{y0}}{\omega}\sin\omega t + \left(\frac{v_{y0}}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\sin\gamma\right)(1 - \cos\omega t) \tag{49}$$

Pentru a determina coordonata z se integrează ecuația (27) și se obține succesiv :

$$\dot{z} = -kE\cos\cdot\gamma\cdot t + v_{z0} \tag{50}$$

$$z = v_{z0}\cdot t - \frac{1}{2}kE\cos\gamma\cdot t^2 \tag{51}$$

Sistemul de ecuații (48), (49), (51) definește complet traiectoria elecéronului în funcție de parametrii mărimilor fizice E, B, v_0 și geometrice α, β, γ.

2.2. *Cazuri particulare reprezentative.* Se vor considera acele cazuri care au semnificație fizică pentru standul de verificare a camerelor de stingere în vid.

2.2.1. *Cîmp magnetic omogen, cîmp electric nul, $\bar{v}_0$ situat în planul xOz.*

În acest caz $\bar{E} = 0$, $\beta = 0$ (vezi figura 11). Din relațiile (48), (49), (51) rezultă

$$x = \frac{v_0}{\omega}\cos\alpha\,\sin\omega t \tag{52}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}\cos\alpha(1 - \cos\omega t) \tag{53}$$

$$z = v_0\sin\alpha\cdot t \tag{54}$$

Dacă se notează $\frac{v_0}{\omega}\cos\alpha = R$ se poate observa că proiecția traiectoriei în planul xOy este un cerc de rază R cu centrul pe axa y, ca în figura 11. Traiectoria electronului este o elice cu pas constant $h = 2\pi v_0 \sin\alpha/\omega$.

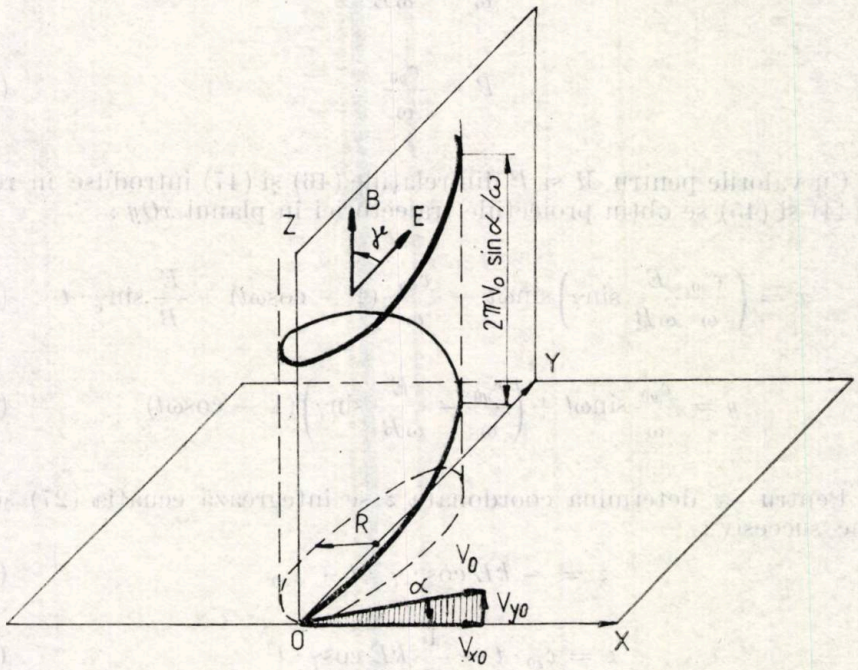


Fig. 11. Vectorul $\bar{v}_0$ situat în planul xOz.

Dacă $\alpha = 0$, adică viteza inițială $\bar{v}_0$ are componentă numai după direcția x electronul descrie o mișcare circulară:

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{55}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t \tag{56}$$

$$z = 0 \tag{57}$$

2.2.2. *Cîmp electric omogen, cîmp magnetic nul, $\bar{v}_0$ situat în plannl xOz.*

În acest caz se integrează direct ecuațiile (25), (26), (27) care pentru $\beta = 0$, $B = 0$, $\gamma = 0$, $\bar{E} = \bar{E}_z$, devin:

$$\ddot{x} = 0\,;\ \dot{x} = v_{x0}\,;\ x = v_{x0}t \tag{58}$$

$$\ddot{z} = -kE\,;\ \dot{z} = v_{z0} - kEt\,;\ z = v_{z0} - \frac{1}{2}kE\cdot t^2 \tag{59}$$

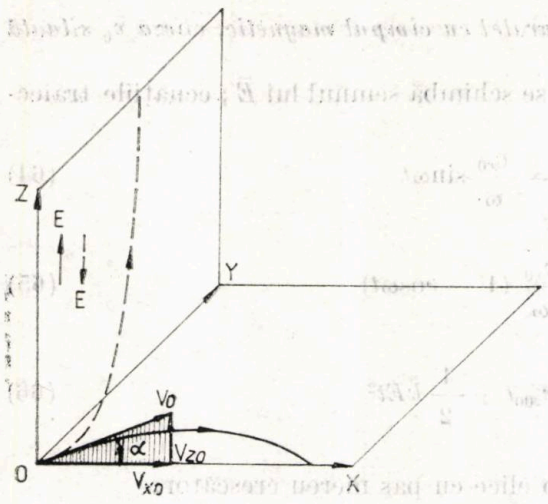


Fig. 12. Cîmp magnetic nul, $\bar{v}_0$ plasat în planul xOz

Dacă sensul lui $\bar{E}$ este inversat, componenta după axa z își schimbă semnul

$$z = v_{0z} + \frac{1}{2} kEt^2 \quad (60)$$

adică electronul este accelerat (relația 60) și nu frînat ca în relația (59).

Reprezentarea grafică a traiectoriei este prezentată în figura 12 pentru ambele sensuri ale vectorului $\bar{E}$.

2.2.3. *Cîmpul electric paralel cu cîmpul magnetic, viteza $\bar{v}_0$ situată în planul xOz, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.*

În acest caz ecuațiile (48), (49), (51) devin :

$$x = \frac{v_{x0}}{\omega} \sin\omega t \quad (61)$$

$$y = \frac{v_{x0}}{\omega}(1 - \cos\omega t) \quad (62)$$

$$z = v_{z0} \cdot t - \frac{1}{2} kEt^2 \quad (63)$$

iar traiectoria electronului este o elice cu pas mereu scurtat, ca în figura 13.

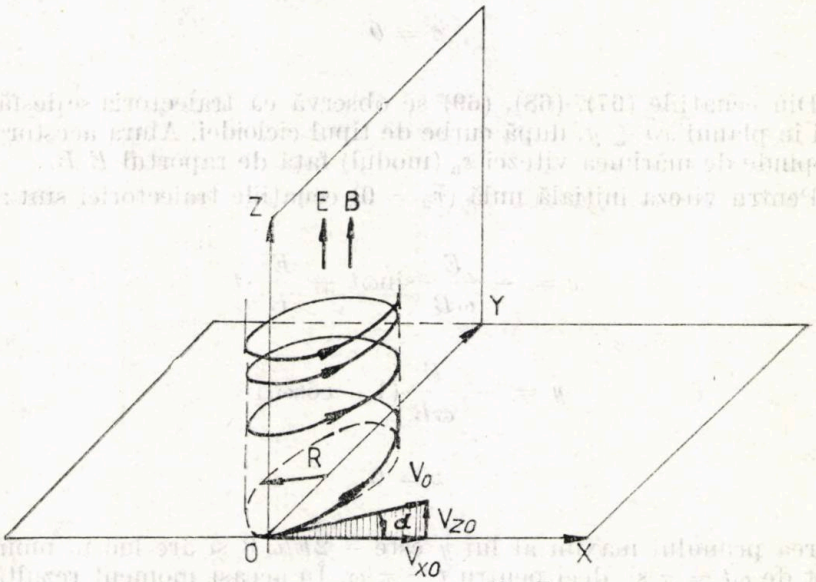


Fig. 13. Elice cu pas mereu scurtat, $\bar{E} \parallel \bar{B}$, $\bar{v}_0$ în planul zOx

2.2.4. *Cîmpul electric antiparalel cu cîmpul magnetic, vineza* $\bar{v}_0$ *situată în planul* xOy, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

În acest caz, în relația (63) se schimbă semnul lui $\bar{E}$; ecuațiile traiectoriei devin:

$$x = \frac{v_{x0}}{\omega} \sin\omega t \tag{64}$$

$$y = \frac{v_{x0}}{\omega} (1 - \cos\omega t) \tag{65}$$

$$z = v_{z00}t + \frac{1}{2} kEt^2 \tag{66}$$

iar traiectoria electronului este o elice cu pas mereu crescător.

2.2.5. *Cîmpul electric perpendicular pe cîmpul magnetic,* $\bar{v}_0$ *are componentă numai după direcția* x.

În acest caz $\gamma = \pi/2$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$, iar ecuațiile (48), (49), (1) devin:

$$x = \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) \sin\omega t + \frac{E}{B} t \tag{67}$$

$$y = \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{E}{\omega B}\right) (1 - \cos\omega t) \tag{68}$$

$$z = 0 \tag{69}$$

Din ecuațiile (67), (68), (69) se observă că traiectoria se desfășoară numai în planul $xo \pm y$, după curbe de tipul cicloidei. Alura acestor cicloide depinde de mărimea vitezei v_0 (modul) față de raportul E/B.

Pentru viteza inițială nulă ($\bar{v}_0 = 0$) ecuațiile traiectoriei sînt:

$$x = -\frac{E}{\omega B} \sin\omega t + \frac{E}{B} \cdot t \tag{70}$$

$$y = -\frac{E}{\omega B} (1 - \cos\omega t) \tag{71}$$

$$z = 0 \tag{72}$$

Valoarea primului maxim al lui y este $-2E/\omega B$ și are loc în momentul definit de $\omega t = \pi$ și deci pentru $t = \pi/\omega$. În aceast moment rezultă $x = \pi E/B\omega$. Pentru $t = 2\pi/\omega$ rezultă $x = 2\pi E/B\omega$ și $y = 0$, ș.a.m.d.

Pentru viteza inițială $v_0 = E/B$ rezultă:

$$x = \frac{E}{B} t; \quad y = 0; \quad t = 0 \tag{73}$$

În acest caz traiectoria electronului este o dreaptă care se confundă cu axa x.

Pentru $v_0 = 2\,E/B$, din relațiile (64), (65), (66), se observă că primul maxim al lui y este $+ 2E/\omega B$ și are loc în momentul $t = \pi/\omega$ la valoarea lui $x = \pi E/B\omega$. Pentru raportul $v_0 < E/B$ și $\frac{E}{B} < V_0 < \frac{E}{2B}$ se obțin cicloide scurtate, iar pentru $v_0 > \frac{2E}{B}$ se obțin cicloide buclate.

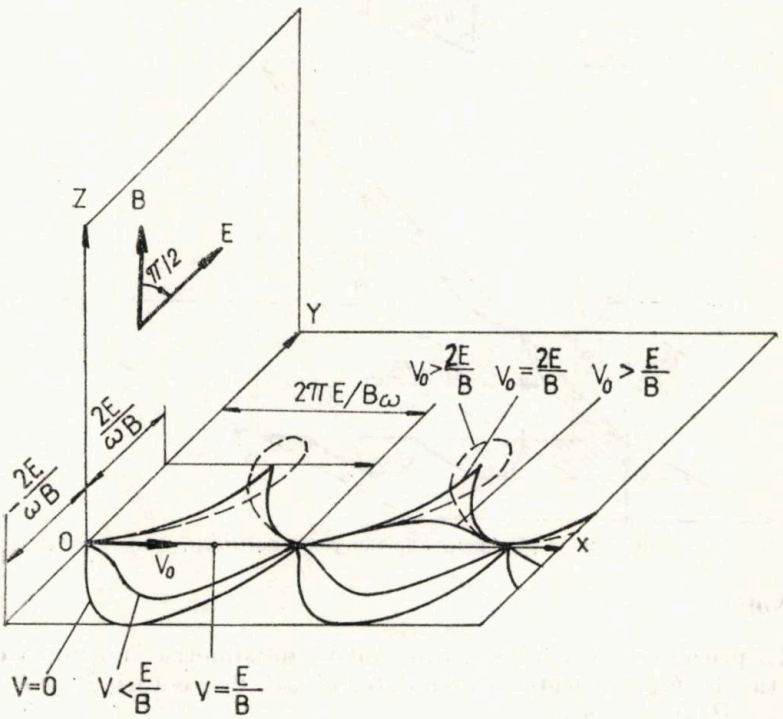


Fig. 14. Cicloide în planul $xO \pm y$; $\bar{B} \perp \bar{E}$, $\bar{v}_0$ după direcția $+ x$

În figura 14 sînt reprezentate cicloidele posibile situate în planul $xO \pm y$.

2.2.6. *Cîmpul electric perpendicular pe cîmpul magnetic, viteza $\bar{v}_0$ are componentă numai după direcția z.*

În acest caz $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $\gamma = \pi/2$, iar după relațiile parametrice (48), (49), (51) rezultă:

$$x = -\frac{E}{\omega B} \sin\omega t + \frac{E}{B} t \tag{74}$$

$$y = -\frac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t) \tag{75}$$

$$z = v_0 t \tag{76}$$

Din aceste relații se observă că proiecțiile traiectoriei în planul $xO\pm$ $\pm y$ rămîn identice cu proiecțiile din cazul precedent cu $\bar{v}_0 = 0$ (relațiile (70) și (71)) dar coordonata z crește liniar în raport cu timpul, ca în figura 15.

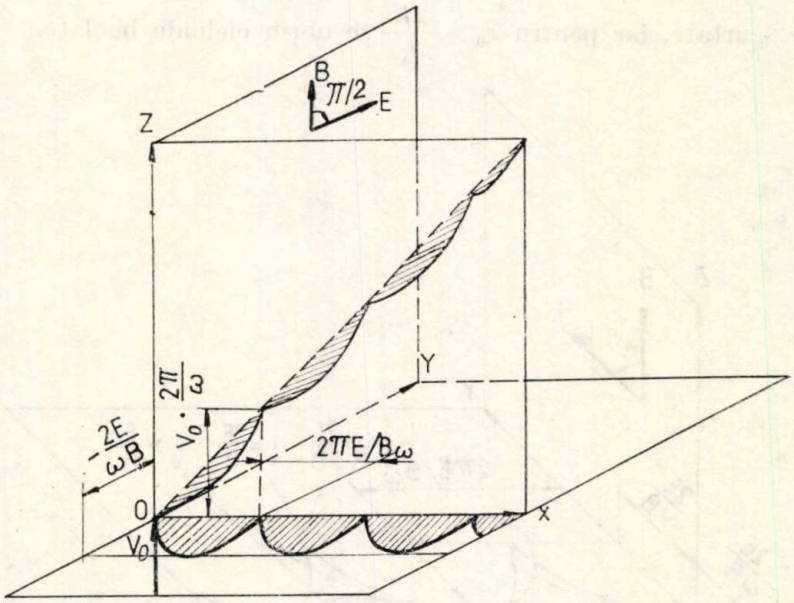


Fig. 15. Cicloide într-un plan perpendicular pe planul zOx, $\bar{v}_0$ după direcția $+z$.

Notă

În prezentare s-a folosit, din motive de simetrie, noțiunea de cîmp magnetic. În fapt traiectoria este determinată de vectorii $\bar{B}$ și $\bar{E}$. Se știe că $\bar{B} = \mu\bar{H}$ și $\mu = \mu_0\mu_r$.

BIBLIOGRAFIE

1. *W. Kuhl, K. Wieh*, Messeinrichtung des Innendrucks von Vakuumschaltröhren. Siemens Zeitschrift 51, H5 1977, p. 227—430.
2. *H. P. Bader*, Messung des Gasdruckes in Vakuumbogenlöschkammern. Wis. Techn. Mit. IPH Berlin 1976, 17, p. 41—42
3. *R. I. Lucek, W. I. Pearce*, Apparatus and method for measuring the pressure inside a vacuum circuit intrerupter. United States Patent Office 3.263.162.26 Iuly 1966
4. *F. M. Penning*, Tiefdruckmanometer. Philips Techn. Rundschau 2, 1973, p. 201—208.
5. *Manfred von Ardenne*, Tabellen zu angewandten Physik Band 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1975.

6. *I. Eichmeyer*, Moderne Vakuumelektronik. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1981
7. *Wutz — Adam — Walcher*, Theorie und Praxis der Vakuumtechnik. Vieweg Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1982
8. xxx Ionenzersteuberpumpen. Handbuch Hochvakuum Dresden 1978.
9. *L. Suciu*, Lucrare de diplomă IPB, Facultatea Electrotehnică, Bucureşti 1983.
10. *W. R. Smythe*, Static and dynamic electricity. Mc Graw Hill Book Company Inc. 1950.
11. *U. Tietze, Ch. Schenk*, Halbleiter — Schaltungstechnik. Fünfte, überarbeitete Auflage Springer — Verlag Berlin, Heidelberg, Wew York 1980.
12. *G. Tărlungeanu*, Lucrare de diplomă IPB. Facultatea Electrotehnică, Bucureşti, 1983.

Innendruckmessen von Vakuumschaltröhren

Die Überlegungen, die als Grund für die Entwicklung eines Prüfstandes für die Messung des Innendrucks einer Vakuumlöschkammer dargelegt sind. Die Parameter für die Stromquelle und für die Spannungsquelle, die Typ von Magnetroneirichtung darstellen, berechnet sind. So ist est möglich den Entladungsstrom (2 ... 800 μA) zu messen. Dieser Strom als Information über den Druck in der Vakuumlöschkammer gilt. Im Anhang die Ableitung der Gleichungen für die Bahnen der Elektronen in den elektrischen und magnetischen Felder gegeben ist.

C. Z. 621 .317 .3 : 621. 311. 161
621.3.0/6 24/.2

METODĂ DE DETERMINARE A PUTERILOR ACTIVĂ ȘI REACTIVĂ ÎNTR-UN PUNCT OARECARE AL UNEI LINII LUNGI

CARMEN GOLOVANOV, P. MANOLESCU *

Se prezintă o metodă de determinare a parametrilor secundari (de propagare) ai liniei și de determinare a puterii active și reactive într-un punct oarecare al unei linii lungi.

Realizarea liniilor de foarte înaltă tensiune și, în special, a celor de interconexiune între diferite sisteme energetice impune determinarea cu precizie a mărimilor ce definesc transportul de energie.

În cazul liniilor de interconexiune se pune problema determinării puterii transportate în punctul situat la granița celor două sisteme energetice, putere ce va fi luată în considerare în analiza balanței de schimb energetic sau în facturarea energiei livrate.

Metoda propusă permite stabilirea, pe baza ecuațiilor liniilor electrice lungi, a unor expresii pentru calculul puterilor activă și reactivă într-un punct oarecare al unei linii lungi, în funcție de valorile mărimilor electrice (tensiuni, curenți, puteri), măsurate la extremitățile liniei. În aceste expresii intervin și parametrii secundari (impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ și coeficientul de propagare $\underline{\gamma}$) care se determină în funcție de valorile calculate ale parametrilor principali (rezistență lineică r_0, inductivitate lineică l_0, conductivitate lineică g_0 și capacitate lineică c_0). Avînd în vedere însă, o serie de aspecte care nu pot fi luate în considerație în calcul, ca spre exemplu : forma specifică a conductorului, configurația terenului, influența stîlpilor liniei, numărul de transpuneri pe linie, zonele de poluare traversate de linie, rezultă că valorile parametrilor primari r_0, l_0, g_0 și c_0, și ale parametrilor secundari $\underline{Z}_c$ și $\underline{\gamma}$ sînt afectate de erori semnificative.

În acest caz, determinarea parametrilor secundari ai liniei, plecînd de la valori măsurate simultan ale mărimilor ce definesc transportul de energie (tensiuni, curenți, puteri) — la extremitățile liniei, prezintă avantajul includerii influenței tuturor aspectelor specifice liniei studiate.

Cunoașterea, cu un grad ridicat de veridicitate, a impedanței caracteristice $\underline{Z}_c$ și a coeficientului de propagare $\underline{\gamma}$, permite o determinare precisă a puterii transportate în oricare punct al liniei.

§ 1. Determinarea parametrilor secundari ai liniei

Impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ a liniei și constanta de propagare $\underline{\gamma}$ reflectă proprietățile geometrice și de material ale mediului — atît conductor, cît și dielectric — de propagare a energiei electromagnetice.

* Conf. dr. ing., Șef lucrări ing.; catedra Măsuri și aparate electrice

a) *Impedanța caracteristică a liniei* $\underline{Z}_c$ se exprimă în funcție de rezistența lineică r_0, inductivitatea lineică l_0, capacitatea lineică c_0 și conductanța lineică de izolație (sau perditanța) g_0:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\,\omega\, l_0}{g_0 + j\omega\, c_0}} = Z_c\, e^{j\varphi_c} \tag{1.1}$$

în care impedanța scalară Z_c este:

$$Z_c = \sqrt{\frac{r_0^2 + \omega^2 l_0^2}{g_0^2 + \omega^2 c_0^2}} > 0 \tag{1.2}$$

iar defazajul caracteristic are expresia:

$$\varphi_c = \frac{1}{2}\operatorname{arc\ tg} \frac{\omega\left(\frac{l_0}{r_0} - \frac{c_0}{g_0}\right)}{1 + \frac{\omega^2 l_0 c_0}{r_0 g_0}}\ ; \quad -\frac{\pi}{4} < \varphi_c < \frac{\pi}{4} \tag{1.3}$$

b) *Constanta de propagare a liniei* $\underline{\gamma}$ se exprimă în funcție de parametrii primari r_0, l_0, c_0 și g_0:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(r_0 + j\omega\, l_0)\,(g_0 + j\omega c_0)} = \gamma + j\beta \tag{1.4}$$

în care constanta de atenuare α are expresia:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(r_0 g_0 - \omega^2 l_0 c_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(r_0^2 + \omega^2 l_0^2)\,(g_0^2 + \omega^2 c_0^2)}} > 0 \tag{1.5}$$

iar constanta de fază β este:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 l_0 c_0 - r_0 g_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(r_0^2 + \omega^2 l_0^2)\,(g_0^2 + \omega^2 c_0^2)}} > 0 \tag{1.6}$$

Din ecuațiile liniilor lungi, scrise pentru mărimile de la ieșire în funcție de cele de la intrare și apoi pentru cele de la intrare în funcție de cele de la ieșire:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, L - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, L - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, L + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, L + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \end{cases} \tag{1.8}$$

rezultă produsele $\underline{U}_2\underline{I}_2$ și $\underline{U}_1\underline{I}_1$, ale căror expresii simplificate sînt:

$$\begin{cases} \underline{U}_2\underline{I}_2 = \underline{U}_1\underline{I}_1 \operatorname{ch} 2\,\underline{\gamma}\,L - \dfrac{1}{2}\left(\underline{Z}_c\,\underline{I}_1^2 + \dfrac{\underline{U}_1^2}{\underline{Z}_c}\right) \operatorname{sh} 2\,\underline{\gamma}\,L \\ \\ \underline{U}_1\underline{I}_1 = \underline{U}_2\underline{I}_2 \operatorname{ch} 2\,\underline{\gamma}\,L + \dfrac{1}{2}\left(\underline{Z}_c\,\underline{I}_2^2 + \dfrac{\underline{U}_2^2}{\underline{Z}_c}\right) \operatorname{sh} 2\,\gamma\,L \end{cases} \tag{1.9}$$

Suma și respectiv diferența acestor expresii care, după gruparea termenilor, au forma:

$$\begin{cases} \underline{U}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_2\,\underline{I}_2 = \dfrac{1}{2 \operatorname{th} \underline{\gamma}\,L}\left[\dfrac{\underline{U}_1^2 - \underline{U}_2^2}{\underline{Z}_c} + \underline{Z}_c(\underline{I}_1^2 - \underline{I}^2)\right] \\ \\ \underline{U}_1\underline{I}_1 - \underline{U}_2\,\underline{I}_2 = \dfrac{\operatorname{th} \underline{\gamma}\,L}{2}\left[\dfrac{\underline{U}_1^2 + \underline{U}_2^2}{\underline{Z}_c} + \underline{Z}_c\,(\underline{I}_1^2 + \underline{I}_2^2)\right] \end{cases} \tag{1.10}$$

permit eliminarea necunoscutei $\operatorname{th} \underline{\gamma}\,L$ prin înmulțirea relațiilor (1.10), obținîndu-se ecuația:

$$\underline{Z}_c^4(\underline{I}_1^4 - \underline{I}_2^4) - 2\,\underline{Z}_c^2(\underline{U}_1^2\underline{I}_1^2 - \underline{U}_2^2\underline{I}_2^2) + \underline{U}_1^4 - \underline{U}_2^4 = 0 \tag{1.11}$$

Soluțiile acestei ecuații sînt:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{c1',\,1''} = \pm\sqrt{\dfrac{\underline{U}_1^2 + \underline{U}_2^2}{\underline{I}_1^2 + \underline{I}_2^2}} \\ \\ \underline{Z}_{c\,2',\,2''} = \pm\sqrt{\dfrac{\underline{U}_1^2 + \underline{U}_2^2}{\underline{I}_1^2 - \underline{I}_2^2}} \end{cases} \tag{1.12}$$

Din relațiile (1.10) se determină soluțiile pentru $\operatorname{th} \underline{\gamma}\,L$:

$$\begin{cases} \operatorname{th} \underline{\gamma}\;L_{1',\,1''} = \dfrac{\underline{U}_1\underline{I}_1 - \underline{U}_2\underline{I}_2}{\pm\sqrt{(\underline{U}_1^2 + \underline{U}_2^2)\,(\underline{I}_1^2 + \underline{I}_2^2)}} \\ \\ \operatorname{th} \underline{\gamma}\;L_{2',\,2''} = \pm\dfrac{\sqrt{(\underline{U}_1^2 - \underline{U}_2^2)\,(\underline{I}_1^2 - \underline{I}_2^2)}}{\underline{U}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_2\underline{I}_2} \end{cases} \tag{1.13}$$

În relațiile (1.12) și (1.13) intervin curenții și tensiunile măsurate la extremitățile liniei. Se admite că :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = U_1 e^{j0} \\ \underline{I}_1 = I_1 e^{-j\varphi_1} \\ \underline{U}_2 = U_2 e^{-j\delta} \\ \underline{I}_2 = I_2 e^{-j(\delta+\varphi_2)} \end{cases} \tag{1.14}$$

Defazajele φ_1 și φ_2 se determină din indicațiile aparatelor montate la extremitățile liniei (wattmetru, voltmetru, ampermetru) :

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{U_1 I_1} \; ; \quad \cos \varphi_2 = \frac{P_2}{U_2 I_2} \tag{1.15}$$

Defazajul δ al tensiunii la ieșire se determină din ecuuația :

$$\underline{U}_2 = U_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} L \tag{1.16}$$

în care se introduc valorile $\underline{\gamma}$ și $\underline{Z}_c$ rezultate din calculul de proiectare al liniei.

Pe baza criteriilor fizice evidențiate de relațiile (1.1 ... 1.6) se selectează din soluțiile (1.12) și (1.13) valorile pentru impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ și constanta de propagare $\underline{\gamma}$.

Aceste valori introduse în ecuația (1.16) vor conduce la un defazaj δ_1 ; se continuă iterativ calculul, pînă la realizarea condiției $\delta_1 - \delta \leqslant \varepsilon_{adm}$, fiind impusă o anumită eroare limită admisibilă, ε_{adm} (Fig. 1).

Parametrii primari se pot determina pornind de la relațiile :

$$\begin{cases} \underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{r_0 + j\omega l_0}{g_0 + j\omega c_0}} = A + jB \\ \underline{\gamma} = \sqrt{(r_0 + j\omega l_0)(g_0 + j\omega c_0)} = \alpha + j\beta \end{cases} \tag{1.17}$$

din care rezultă :

$$\begin{cases} \underline{Z}_c^2 = \dfrac{r_0 + j\omega l_0}{g_0 + j\omega c_0} = (A + jB)^2 \\ \underline{\gamma}^2 = (r_0 + j\omega l_0)(g_0 + j\omega c_0) = (\alpha + j\beta)^2 \end{cases} \tag{1.18}$$

și apoi :

$$\begin{cases} (r_0 + j\omega l_0)^2 = (A + jB)^2(\alpha + j\beta)^2 \\ (g_0 + j\omega c_0)^2 = \dfrac{(\alpha + j\beta)^2}{(A + jB)^2} \end{cases} \tag{1.19}$$

START

Se introduc: lungimea liniei L; parametrii lineici ai liniei r_0, l_0, c_0, g_0; mărimile electrice ale liniei $U_1, I_1, P_1, U_2, I_2, P_2$; distanța X

Determinarea parametrilor secundari ai liniei (de propagare) $\underline{\gamma}=\sqrt{(r_0+j\omega l_0)(g_0+j\omega c_0)}$; $\underline{Z}_c=\sqrt{\frac{r_0+j\omega l_0}{g_0+j\omega c_0}}$

Calculul defazajelor φ_1 și φ_2

$$\cos\varphi_1=\frac{P_1}{U_1 I_1} \; ; \qquad \cos\varphi_2=\frac{P_2}{U_2 I_2}$$

Estimarea defazajului δ $\underline{U}_2=U_2\angle\delta$

$\underline{U}_2=U_1 ch\,\underline{\gamma}L-\underline{Z}_c I_1 sh\,\underline{\gamma}L$

$$\delta=arc\,tg\left\{\frac{Imag\,[\underline{U}_2]}{Real\,[\underline{U}_2]}\right\}$$

Calculul impedanței caracteristice pe baza mărimilor electrice ale liniei

$$\underline{Z}_{c_{1',1''}}=\pm\sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2}{\underline{I}_1^2+\underline{I}_2^2}} \; ; \qquad \underline{Z}_{c_{2',2''}}=\pm\sqrt{\frac{U_1^2-U_2^2}{\underline{I}_1^2-\underline{I}_2^2}}$$

Selectarea pe criterii fizice a valorii $\underline{Z}_c$

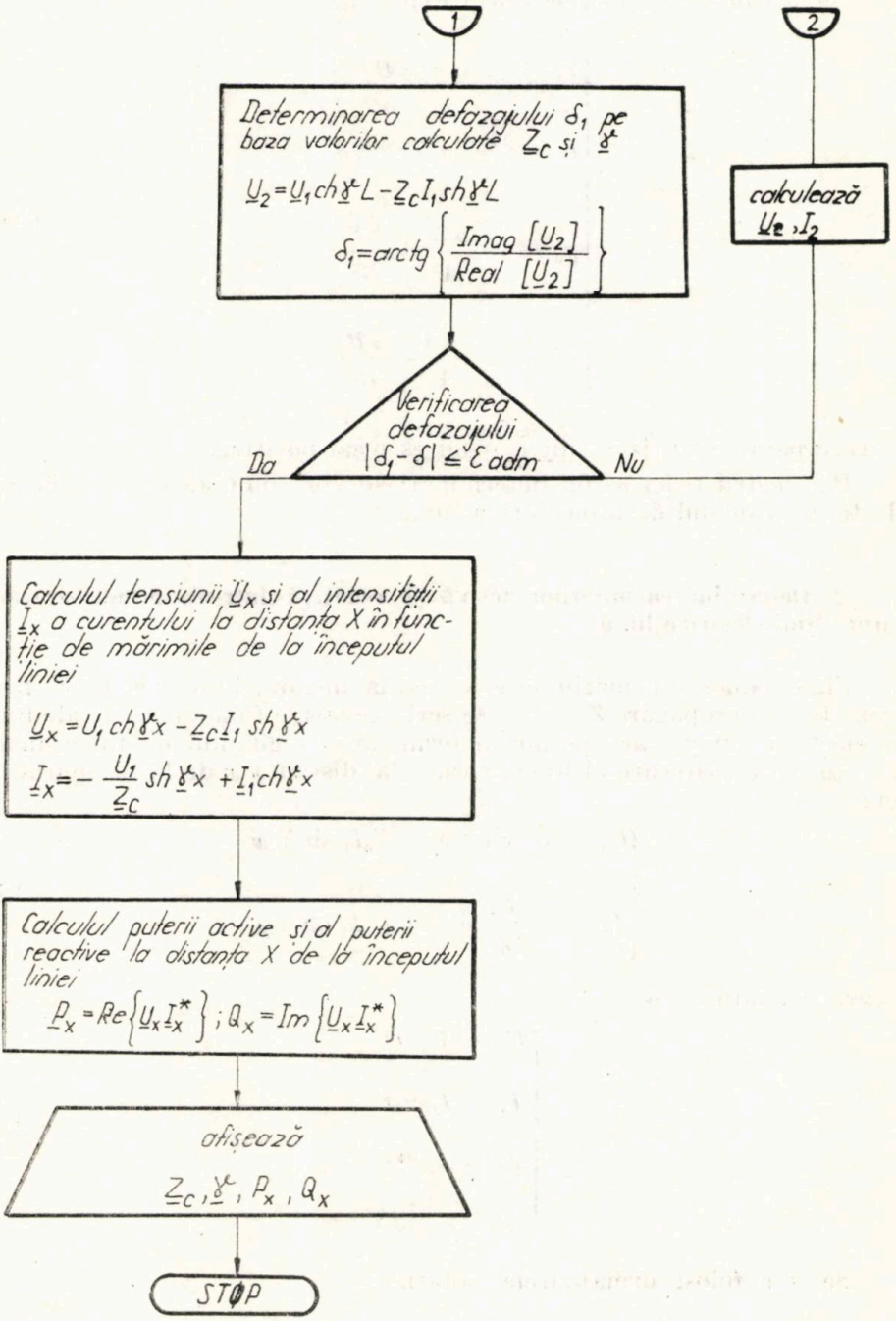
Calculul constantei de propagare pe baza valorii selectate a impedanței caracteristice

$$tg\,\underline{\gamma}L_{1',1''}=\frac{\underline{U}_1\underline{I}_1-\underline{U}_2\underline{I}_2}{\pm\sqrt{(\underline{U}_1^2+\underline{U}_2^2)(\underline{I}_1^2+\underline{I}_2^2)}}$$

$$tg\,\underline{\gamma}L_{2',2''}=\pm\frac{\sqrt{(\underline{U}_1^2-\underline{U}_2^2)(\underline{I}_1^2-\underline{I}_2^2)}}{\underline{U}_1\underline{I}_1+\underline{U}_2\underline{I}_2}$$

1 2

a


1
2
Determinarea defazajului δ_1 pe baza valorilor calculate $\underline{Z}_c$ și $\underline{\gamma}$
$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 ch \underline{\gamma} L - \underline{Z}_c \underline{I}_1 sh \underline{\gamma} L$
$\delta_1 = arctg \left\{ \frac{Imag\ [\underline{U}_2]}{Real\ [\underline{U}_2]} \right\}$
calculează $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$
Verificarea defazajului $|\delta_1 - \delta| \leq \varepsilon\ adm$
Da
Nu
Calculul tensiunii $\underline{U}_x$ și al intensității $\underline{I}_x$ a curentului la distanța X în funcție de mărimile de la începutul liniei
$\underline{U}_x = \underline{U}_1 ch \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 sh \underline{\gamma} x$
$\underline{I}_x = - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} sh \underline{\gamma} x + \underline{I}_1 ch \underline{\gamma} x$
Calculul puterii active și al puterii reactive la distanța X de la începutul liniei
$\underline{P}_x = Re \left\{ \underline{U}_x \underline{I}_x^* \right\}$; $Q_x = Im \left\{ \underline{U}_x \underline{I}_x^* \right\}$
afișează
$\underline{Z}_c$, $\underline{\gamma}$, P_x, Q_x
STOP

b

Fig. 1

După calcule simple, se obțin expresiile :

$$\begin{cases} r_0 = |\alpha A - \beta B| \\ l_0 = \dfrac{1}{\omega} |\alpha B + \beta A| \\ g_0 = \dfrac{|\alpha A + \beta B|}{A^2 + B^2} \\ c_0 = \dfrac{1}{\omega} \dfrac{|\beta A - \alpha B|}{A^2 + B^2} \end{cases} \tag{1.20}$$

deoarece parametrii fizici sînt mărimi esențial pozitive.

Parametrii fizici astfel determinați se vor compara cu valorile rezultate din calculul de proiectare a liniei.

§2. Determinarea puterilor activă și reactivă într-un punct oarecare al unei linii electrice lungi

Fiind cunoscute mărimile electrice la intrare, lungimea liniei L și parametrii de propagare Z_c și γ , se scriu ecuațiile fundamentale ale liniilor electrice lungi, care permit determinarea regimului de funcționare dintr-un punct oarecare al liniei, situat la distanța x de la începutul liniei :

$$\begin{cases} \underline{U}_x = U_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, x - \underline{Z}_c I_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, x \\ \underline{I}_x = -\dfrac{U_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, x \end{cases} \tag{2.1}$$

în care s-a admis că

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = U_1 e^{j0} \\ \underline{I}_1 = I_1 e^{-j\varphi_1} \\ \underline{Z}_c = Z_c e^{j\varphi_c} \\ \underline{\gamma} = \alpha + j\beta \end{cases} \tag{2.2}$$

Se vor folosi următoarele notații :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, x = \rho_c e^{j\varepsilon_c} \\ \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, x = \rho_s e^{j\varepsilon_s} \end{cases} \tag{2.3}$$

în care :

$$\begin{cases} \rho_c = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x)} \\ \rho_s = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x)} \\ \varepsilon_c = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha x \cdot \sin 2\beta x}{1 + \operatorname{ch} 2\alpha x \cdot \cos 2\beta x} \\ \varepsilon_s = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha x \cdot \sin 2\beta x}{\operatorname{ch} 2\alpha x \cdot \cos 2\beta x} \end{cases} \tag{2.4}$$

Puterea aparentă complexă $\underline{S}_x$, în punctul situat la distanța x de la începutul liniei, este :

$$\underline{S}_x = \underline{U}_x \underline{I}_x^* = \{\underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x\} \left\{ -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x \right\}^* \tag{2.5}$$

Puterea activă este partea reală din puterea aparentă complexă $\underline{S}_x$:

$$P_x = \operatorname{Real}\{S_x\} = -\frac{U_1^2}{Z_c} \rho_s \rho_c \cos(\varphi_c + \varepsilon_c - \varepsilon_s) + P_1(\rho_s^2 \cos 2\varphi_c + \\ + \rho_c^2) + Q_1 \rho_s^2 \sin 2\varphi_c - Z_c I_1^2 \rho_c \rho_s \cos(\varphi_c + \varepsilon_s - \varepsilon_c) \tag{2.6}$$

Puterea reactivă este partea imaginară din puterea aparentă complexă $\underline{S}_x$:

$$Q_x = \operatorname{Imag}\{\underline{S}_x\} = -\frac{U_1^2}{Z_c} \rho_s \rho_c \sin(\varphi_c + \varepsilon_c - \varepsilon_s) - \\ - Q_1(\rho_s^2 \cos 2\varphi_c - \rho_c^2) + P_1 \rho_s^2 \sin 2\varphi_c - \\ - Z_c I_1^2 \rho_1 \rho_c \sin(\varphi_c + \varepsilon_s - \varepsilon_c) \tag{2.7}$$

Pentru verificări se determină și expresiile analitice ale puterilor activă și reactivă la extremitățile liniei lungi.

Din relațiile :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}\, L + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma}\, L \end{cases} \tag{2.8}$$

se deduc expresiile intensităţii curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L - \underline{U}_2}{\underline{Z}_c \operatorname{ch} \underline{\gamma} L} \\ \\ \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L}{\underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} L} \end{cases} \tag{2.9}$$

Multiplicînd ambii membri ai relaţiilor (2.9) cu $\underline{U}_1^*$, respectiv cu $\underline{U}_2^*$, se obţin conjugatele puterilor complexe $\underline{S}_1$ şi $\underline{S}_2$:

$$\begin{cases} \underline{S}_1^* = \underline{U}_1^* \underline{I}_1 = P_1 - jQ_1 = \dfrac{\underline{U}_1^* \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L - \underline{U}_1^* \underline{U}_2}{\underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} L} \\ \\ \underline{S}_2^* = \underline{U}_2^* \underline{I}_2 = P_2 - jQ_2 = \dfrac{\underline{U}_2^* \underline{U}_1 - \underline{U}_2^* \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} L}{\underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} L} \end{cases} \tag{2.10}$$

Cu notaţiile (2.3) şi (2.4) şi admiţînd că :

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{j\delta} \tag{2.11}$$

rezultă expresiile puterilor activă şi reactivă la extremităţile liniei :

— puterea activă la intrare :

$$P_1 = \frac{U_1^2}{Z_c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L + \cos 2\beta L)} \cos(\varepsilon_c - \varepsilon_s - \varphi_c) - \frac{U_2}{U_1} \cos(\delta + \varepsilon_s + \varepsilon_c)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L - \cos 2\beta L)}} \tag{2.12}$$

— puterea reactivă la intrare :

$$Q_1 = -\frac{U_1^2}{Z_c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L + \cos 2\beta L)} \sin(\varepsilon_c - \varepsilon_s - \varphi_c) + \frac{U_2}{U_1} \sin(\delta + \varepsilon_s + \varepsilon_c)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L - \cos 2\beta L)}} \tag{2.13}$$

— puterea activă la ieşire :

$$P_2 = \frac{U_2^2}{Z_c} \cdot \frac{\frac{U_2}{U_1} \cos(\delta - \varepsilon_s - \varepsilon_c) - \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L + \cos 2\beta L)} \cos(\varepsilon_c - \varepsilon_s - \varphi_c)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha L - \cos 2\beta L)}}$$

— puterea reactivă la ieșire :

$$Q_2 = -\frac{U_2^2}{Z_c}\cdot\frac{\frac{U_1}{U_2}\sin(\delta-\varepsilon_s-\varepsilon_c)-\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2\alpha L+\cos 2\beta L)}\sin(\varepsilon_c-\varepsilon_s-\varphi_c)}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2\alpha L-\cos 2\beta L)}} \tag{2.15}$$

Valorile măsurate P_1, Q_1 și P_2, Q_2 se pot astfel compara cu valorile calculate cu relațiile (2.12)—(2.15), în care intervin : parametrii secundari ai liniei, $\underline{Z}_c(Z_c, \varphi_c)$ și $\underline{\gamma}(\alpha, \beta)$, tensiunile la intrare și la ieșire, U_1 și U_2 ca modul și defazajul δ al tensiunii de la ieșire.

Concluzii

1. Metoda de determinare a puterilor activă și reactivă într-un punct oarecare al unei linii lungi este utilă în următoarele cazuri practice :

a) O linie electrică are o extremitate în țara A, parcurge teritoriul țării B și are cealaltă extremitate în țara C. Se poate estima puterea transportată pe teritoriul țării B.

b) O linie electrică are o extremitate în țara A și cealaltă extremitate în țara B, iar la frontieră nu există punct de măsurare. Se pot estima puterile activă și reactivă la frontieră, pe baza măsurătorilor mărimilor electrice la extremitățile liniei.

2. Metoda indirectă de măsurare propusă, fără a fi deosebit de complexă, permite obținerea parametrilor secundari (de propagare) ai liniei, care rămîn practic nemodificați pe toată durata de viață a liniei.

3. Metoda de determinare a parametrilor secundari (de propagare) și a puterilor activă și reactivă într-un punct oarecare al unei linii electrice lungi a fost pusă la dispoziția Institutului de studii și proiectări energetice I.S.P.E. [1].

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Golovanov, P. Manolescu*, Studiul privind investițiile române în cadrul conexiunii la 750 kV cu URSS și RPB. Stabilirea modului de decontare a energiei și repartizarea consumului tehnologic între URSS și RPB. — contract de colaborare științifică nr. 2—3—6/25.06.1983. Beneficiar : ISPE — București.
2. *C. Golovanov, P. Manolescu* Determinarea puterilor active și reactive într-un punct oarecare al unei linii lungi. Producerea, transportul, distribuția și utilizarea rațională a energiei. A VI-a sesiune de comunicări tehnico-științifice. Suceava 24—25 mai 1985.
3. *C. Mocanu*, Teoria circuitelor electrice. Editura didactică și pedagogică, București, 1980.
4. *Al. Timotin*, ș. a., Lecții de Bazele electrotehnicii, Editura didactică și pedagogică, București, 1962.
5. *I. S. Antoniu*, Bazele electrotehnicii, vol. I și II. Editura didactică și pedagogică, București 1974.

Method of Determining the Active and Reactive Power at Any Point of a Long Line

A method of determination of the secondary parameters (of propagation) of the line and of the active and reactive power at any point of a long line is presented.

C. Z.: 621.313.33

METODĂ PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR FUNCȚIONALI AI MAȘINII ASINCRONE PRIN REZOLVAREA PROBLEMEI DE CÎMP ELECTROMAGNETIC

PARTEA I. REZOLVAREA PROBLEMEI DE CÎMP ELECTROMAGNETIC PENTRU MAȘINA ASINCRONĂ.

A. MORARU, M. COVRIG*

În lucrare se prezintă o metodă de rezolvare a problemei de cîmp electromagnetic pentru mașina asincronă bazată pe utilizarea permeabilității echivalente. Metoda prezentată rezolvă problema de cîmp electromagnetic separat pentru stator și rotor, facilități care permit reducerea memoriei operative de calcul în condițiile descrierii mai fidele a structurii domeniului.

1. Intoducere

Îmbunătățirea performanțelor motoarelor asincrone, concomitent cu reducerea prețului de cost, necesită o cunoaștere tot mai precisă a caracteristicilor funcționale, respectiv a parametrilor electromagnetici ai mașnii asincrone încă din faza de proiectare.

Metodele de calcul clasice [1], [2] folosite în practica industrială dau în general satisfacție la determinarea caracteristicilor nominale ale mașinilor, mai ales atunci cînd sînt corectate cu coeficienții determinați experimental în corespondență cu specificul fabricației. Aceste metode devin însă nesigure în cazul determinării caracteristicilor de pornire sau a cuplului maxim, în special la mașinile cu rotor în colivie simplă sau dublă, cu efect de refulare pronunțat, mai ales atunci cînd saturația datorată fluxului magnetic de dispersie joacă un rol important în aceste regimuri de funcționare.

Valorile parametrilor mașinii asincrone la un regim de funcționare dat se pot determina mai exact prin rezolvarea problemei de cîmp electromagnetic în domeniul mașinii cu luarea în considerație a neliniarității circuitului magnetic. Obișnuit se rezolvă problema bidimensională, în secțiunea transversală a mașinii, utilizînd potențialul magnetic vector, iar apoi se aduc corecții tensiunilor electromotoare induse cu ajutorul unor inductivități de dispersie corespunzătoare zonelor frontale ale mașinii, neluate în considerație prin rezolvarea problemei plan-paralele.

Se observă însă că, cu toate simplificările aduse modelului mașinii asincrone, problema de cîmp electromagnetic ce trebuie rezolvată prezintă dificultăți deosebite: este bidimensională, în medii neliniare, cu zone în

* Conf. dr. ing; Șef lucrări dr. ing., catedra Mașinii electrice

care apar curenți induși (colivie), armăturile își schimbă poziția relativă, iar într-un regim de funcționare dat (prin tensiune și alunecare), nu se cunosc dinainte curenții statorici (trei curenți de fază). Din aceste motive metodele folosite pînă în prezent [3], [4], [5] sînt laborioase, necesită un timp de calcul important, o memorie operativă foarte mare și se limitează la o reprezentare destul de grosieră a geometriei domeniului (stator — întrefier — rotor). Aceste dezavantaje au făcut ca metodele citate să nu fie folosite în practica proiectării motoarelor asincrone, mai ales că în acest proces trebuie rezervat loc și pentru studiul unor serii de variante constructive, în vederea optimizării obiectului proiectat.

În prezenta lucrare se propune o nouă metodă de rezolvare numerică a problemei de cîmp electromagnetic în mașina asincronă bazată pe folosirea permeabilității magnetice echivalente fundamentată de Neiman [6], și pe exploatarea avantajelor ce decurg în cazul configurației specifice a mașinii asincrone.

2. Formularea problemei de cîmp electromagnetic

Se consideră problema de cîmp electromagnetic plan-paralelă din secțiunea transversală a mașinii asincrone, în regim periodic permanent, la alimentarea cu tensiune sinusoidală.

De la început se adoptă ipoteza folosirii permeabilității magnetice echivalente fundamentată de Neiman [6] și reluată de Demerdash și alții [7], [8]. În locul unei permeabilități dependente de valoarea instantanee a inducției magnetice se ia în considerație o permeabilitate constantă în timp, funcțiune de punct și care este determinată de amplitudinea inducției magnetice din acel punct. În acest fel, mediul magnetic neliniar este înlocuit cu un mediu liniar neomogen, ale cărui proprietăți (permeabilități) depind în mod neliniar de amplitudinea inducției magnetice. Ipoteza adoptată permite rezolvarea problemei de cîmp în regim armonic, toate mărimile fiind funcțiuni sinusoidale de timp, ceea ce simplifică mult calculele și totodată rezultă proprietăți de periodicitate spațio — temporale a căror folosire simplifică suplimentar problema studiată.

Se folosesc următoarele ecuații ale cîmpului electromagnetic plan-paralel, scrise direct în complex, pentru regim sinusoidal de pulsație ω :

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\bar{A} \tag{a}$$

$$\oint_{\Gamma_l} \bar{H}\mathrm{d}\bar{r} = \int_{S\Gamma} \bar{J}\bar{n}\mathrm{d}S \tag{b}$$

(1)

$$\oint_{\Gamma_l} (\rho\bar{J} + j\omega\bar{A})\mathrm{d}\bar{r} = 0 \tag{c}$$

$$\bar{B} = \mu(x, y)\bar{H}\,;\ \mu(x, y) = f(B_{max}(y, x)) \tag{d}$$

Mărimile vectoriale au expresiile :

$$\bar{A} = \bar{k}\underline{A}(x, y); \quad \bar{J} = \bar{k}\underline{J}(x, y)$$

$$\bar{B} = \bar{i}\underline{B}_x(x, y) + \bar{j}B_y(x, y) = \bar{i}\frac{\partial \underline{A}}{\partial y} + \bar{j}\left(-\frac{\partial \underline{A}}{\partial x}\right) \tag{2}$$

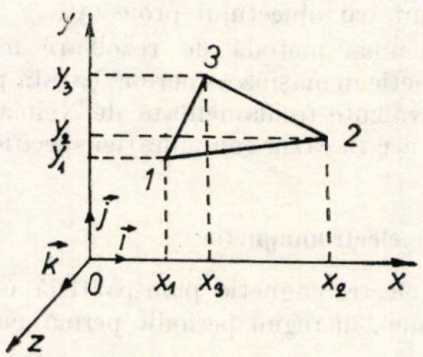


Fig. 1

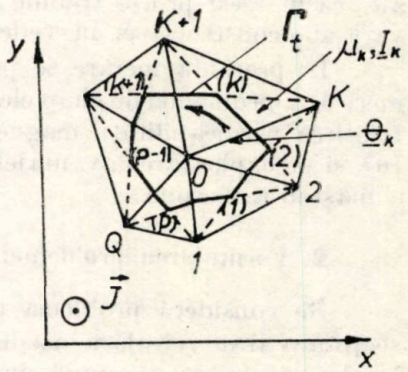


Fig. 2

În vederea rezolvării numerice a problemei de cîmp, domeniul plan (secţiunea transversală a maşinii asincrone) se consideră divizat în subdomenii triunghiulare omogene ca proprietăţi electrice şi magnetice. Pe fiecare subdomeniu triunghiular (fig. 1) se admite o variaţie biliniară a potenţialului magnetic vector şi atunci

$$\underline{A}(x, y) = \underline{\alpha}x + \underline{\beta}y + \underline{\gamma}$$

$$\underline{B}_x = \underline{\beta} \qquad \underline{B}_y = -\alpha \tag{3}$$

Teorema lui Ampère (1b) se aplică în jurul fiecărui nod al reţelei de subdomenii triunghiulare, pe un contur transversal format din segmente de mediane ale triunghiurilor adiacente (fig. 2). Pentru nodul „o" se obţine o expresie de forma :

$$\sum_{k=1}^{p}(u_k\underline{A}_0 + v_k\underline{A}_k + w_k\underline{A}_{k+1})\frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p}\underline{I}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\underline{\theta}_k \tag{4}$$

în care $\underline{A}_0, \underline{A}_k, \underline{A}_{k+1}$ sînt potenţialele din nodurile vîrfurilor triunghiului k,

u_k, v_k, w_k sînt coeficienţi dependenţi de dimensiunile triunghiului k

μ_k — este permeabilitatea subdomeniului triunghiular k,

$\underline{I}_k$ — este curentul de conducţie care străbate suprafaţa triunghiului k,

$\underline{\theta}_k$ — este solenaţia corespunzătoare unei pîzne de curent (exterioare) dispuse pe latura ok

Relația (4) coincide cu expresia obținută prin metoda elementelor finite. Relația (1c) rezultată din legea conducției și legea inducției electromagnetice aplicată pe un contur longitudinal Γ_l, trecînd în sens axial prin centrele geometrice a două subdomenii triunghiulare conductoare m și n (fig. 3) și în sens transversal prin capetele de bobine sau inele (porțiunile AA' și BB').

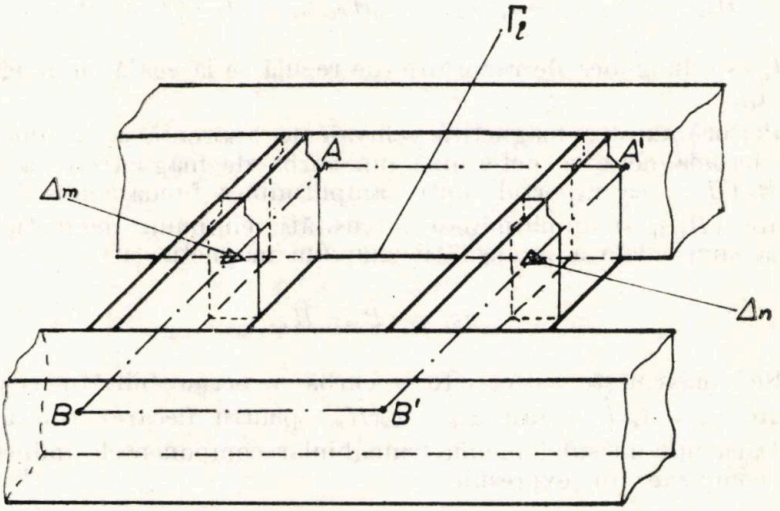


Fig. 3

După unele rearanjări, pentru orice subdomeniu m se obține o relație de forma [10]:

$$R_m \underline{I}_m + j\frac{\omega}{3} l_i(\underline{A}_0 + \underline{A}_m + \underline{A}_{m+1}) = \underline{U} \tag{5}$$

unde :

$\underline{I}_m$ — este curentul axial al subdomeniului conductor m
l_i — este lungimea de calcul a mașinii
R_m — este rezistența electrică a prizmei conductoare triunghiulare corespunzătoare subdomeniului m, pe lungimea barei rotorice
$\underline{A}_0$, $\underline{A}_m$, $\underline{A}_{m+1}$ — sînt potențialele magnetice corespunzătoare vîrfurilor triunghiului m
$\underline{U}$ — este o tensiune exterioară, determinată de căderea de tensiune în inelele de scurtcircuitare a coliviei

$$\underline{U} = -\underline{Z}_i \underline{I}_b \tag{6}$$

unde $\underline{Z}_i$ reprezintă impedanța inelelor raportată la o bară, iar $\underline{I}_b$ este curentul total al barei din care face parte subdomeniul m.

În legătură cu calculul permeabilității magnetice echivalente care intervine în ecuațiile (4) trebuie făcute următoarele precizări : armăturile

statorice și rotorice pot avea lungimi diferite l_s, l_r, sînt realizate din tole cu un anumit factor de umplere k_{Fe} și pot avea canale de ventilație radiale de lungime totală l_{vs}, l_{vr}. Atunci în problema de cîmp plan-paralelă în zonele feromagnetice se va lucra cu o inducție magnetică aparentă B_a, care se determină din relația :

$$B_{ak}l_a = B_{Fe}(l_k - l_{vk})k_{Fe} + \mu_0 H_{Fe}[l_{vk} + (l_k - l_{vk})(1 - k_{Fe})] \tag{7}$$

unde l_a este lungimea de raportare (de regulă se ia egală cu lungimea de calcul l_i).

Permeabilitatea magnetică echivalentă aparentă μ_a a unui subdomeniu feromagnetic se determină din curba de magnetizare a materialului $B_{Fe}(H_{Fr})$, ca raportul dintre amplitudinea fundamentalei inducției aparente $(\hat{B}_{ak})_1$ și amplitudinea intensității cîmpului magnetic $\hat{H}_{Fe}$, la variația sinusoidală a intensității cîmpului magnetic [9] :

$$\mu_{ak} = (\hat{B}_{ak})_1/\hat{H}_{Fe} \tag{8}$$

Se construiește astfel cîte o curbă a permeabilității echivalente aparente $\mu_{ak} = f_k(\hat{B}_{ak})$ sau $\mu_{ak} = g_k(\hat{H}_{Fe})$ pentru fiecare armătură.

Dacă într-un subdomeniu triunghiular componentele inducției aparente complexe au expresiile

$$\underline{B}_x = a + jb \qquad \underline{B}_y = c + jd \tag{9}$$

atunci amplitudinea temporală a inducției din subdomeniu va fi [10] :

$$\hat{B}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 + 4(ab + cd)^2}} \tag{10}$$

3. Sistematizări suplimentare și condiții la limită

Din modul cum a fost formulată problema de cîmp electromagnetic în secțiunea transversală a mașinii asincrone cu ajutorul permeabilității echivalente rezultă cîteva proprietăți importante, care pot fi folosite în vederea unei sistematizări suplimentare, respectiv a unei simplificări a rezolvării :

a) Întrucît pentru mașini cu rotorul în colivie, configurația geometrică a rotorului se repetă după un pas dentar și întrucît stările magnetice succesive prin care trece orice dinte rotoric sînt identice, doar decalate în timp, rezultă că la o partiționare identică în subdomenii triunghiulare a tuturor dinților rotorici, subdomeniile corespondente din dinți diferiți vor avea *permeabilități magnetice echivalente egale*. Se obține astfel o structură a domeniului de cîmp rotoric în care proprietățile electrice și magnetice prezintă aceeași periodicitate ca și configurația geometrică.

b) În mod similar, se observă și la stator o periodicitate a proprietăților electrice, magnetice și geometrice în raport cu o zonă de reparti-

zare a înfășurării statorice. Dacă q este numărul de crestături pe pol și fază ale înfășurării, zona de repartizare cuprinde cq crestături succesive, în care c este cel mai mic număr natural care face ca produsul cq să fie număr întreg; cînd $c = 1$, zona de repartizare coincide cu o zonă de fază

c) De asemenea se observă că în domeniul de cîmp este admisă superpoziția solenațiilor cu condiția ca permeabilitățile echivalente să fie determinate pentru soluția rezultantă (sau pentru o soluție dominantă).

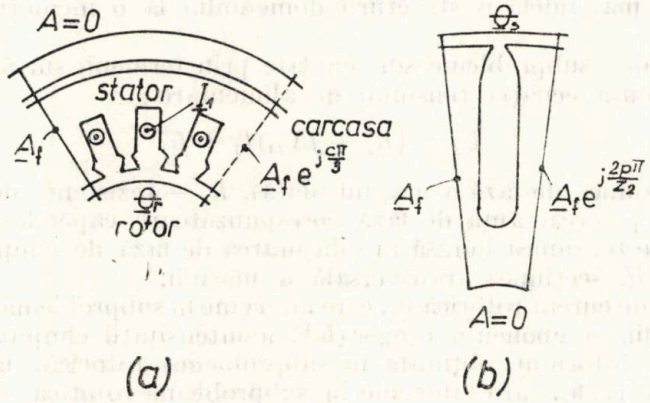


Fig. 4

d) Interacțiunile dominate dintre armături au loc pe fundamentele spațiale (referitoare la pasul polar) ale inducției magnetice și ale solenațiilor armăturilor.

Ținînd seama de proprietățile arătate mai sus, problema de cîmp electromagnetic din secțiunea transversală a mașinii se împarte în două subprobleme, cuplate, mai simple:

— o subproblemă statorică, care cuprinde un sector statoric corespunzător unei zone de fază a înfășurării statorice (fig. 4a) și întrefierul, delimitat spre rotor de o suprafață feromagnetică ideală cilindrică netedă. Condițiile la limită sînt: $\underline{A} = 0$ pe raza exterioară (eventual în afara carcasei), pînza de curent $\underline{\theta}_r$ dată pe suprafața rotorului, cu repartiție spațială sinusoidală (corespunzătoare pasului polar) învîrtitoare sincron, și condiția de periodicitate spațio-temporală a potențialului magnetic vector pe cele două frontiere radiale $\underline{A}_f$ și $\underline{A}_f e^{jc\pi/3}$; sursele cîmpului sînt date de curentul statoric $\underline{I}_1$, cu repartiție cunoscută și de pînza de curent rotorică:

— o subproblemă rotorică, care cuprinde un sector rotoric corespunzător unui pas dentar rotoric (fig. 4 b) și întrefierul, delimitat spre stator de o suprafață feromagnetică ideală cilindrică netedă. Condițiile la limită sînt: $\underline{A} = 0$ pe raza interioară (eventual în axa rotorului), pînza de curent $\underline{\theta}_s$ dată pe suprafața statorului, cu repartiție spațială sinusoidală (corespunzătoare pasului polar), învîrtitoare cu viteza de alunecare și condiția de periodicitate spațio-temperală a potențialului magnetic vector pe cele două frontiere radiale: $\underline{A}_f$ și $\underline{A}_f e^{j2\pi/z_2}$, dacă z_2 este numărul de crestături rotorice și $2p$ este numărul de poli, sursele cîmpului sînt date de pînza de curent statorică $\underline{\theta}_s$.

Condițiile la limită de forma „suprafață feromagnetică (ideală) cu pînza de curent" sînt echivalente unei condiții tip Neumann pentru potențialul magnetic vector — fiind astfel dată componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic pe acest segment de frontieră.

Această împărțire a problemei generale, care pune în valoare structura periodică a secțiunii mașinii, conduce la o reducere drastică a memoriei operative necesară la rezolvarea numerică, respectiv permite o descriere mult mai fidelă a structurii domeniului la o memorie operativă dată.

Cele două subprobleme sînt cuplate prin termenii sursă și mai trebuie satisfăcută ecuația tensiunii de alimentare:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_{f1})\underline{I}_1 + \underline{U}'_1 \tag{11}$$

$\underline{U}_1$ fiind tensiunea de fază a mașinii (dată), R_1 — rezistența de fază a înfășurării, X_{f1} — reactanța de fază corespunzătoare capetelor de bobină, iar $\underline{U}'_1$ — este tensiunea indusă în înfășurarea de fază de cîmpul magnetic determinat în secțiunea transversală a mașinii.

Pînza de curent rotorică $\underline{\theta}_r$, care intervine în subproblema statorică, se determină din componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic la suprafața rotorului, obținută în subproblema rotorică, iar pînza de curent statorică $\underline{\theta}_s$, care intervine în subproblema rotorică, se determină din componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic la suprafața statorului, obținută în subproblema rotorică; mărimea de referință și de legătură între cele două subprobleme o constituie fundamentarea spațială a componentei radiale a cîmpului magnetic. Intrefierul a fost considerat în ambele probleme, atît pentru efectul său stabilizator în calculul iterativ al stării magnetice, cît și pentru determinarea cîmpului magnetic diferențial.

4. Stabilirea mărimilor de circuit corespunzătoare unei soluții de cîmp electromagnetic

Fie soluția de cîmp electromagnetic plan-paralel, în regim sinusoidal, dată sub forma:

$$\bar{E} = \bar{z}_0\underline{E}(r,\theta) \qquad \bar{H} = \bar{r}_0\underline{H}_r(r,\theta) + \bar{\theta}_0\underline{H}_\theta(r,\theta) \tag{12}$$

Mărimile subbarate sînt imagini (amplitudini)complexe, funcțiunii periodice de coordonata unghiulară θ și funcțiuni oarecare de raza r; $\bar{r}_0$, $\bar{\theta}_0$ și $\bar{z}_0$ sînt versorii reperului cilindric r, θ, z.

Vectorul Poynting corespunzător puterii complexe are expresia

$$\bar{E} \times \bar{H}^* = \underline{E}(\bar{\theta}_0\underline{H}_r^* - \bar{r}_0\underline{H}_\theta^*) \tag{13}$$

Se consideră o suprafață închisă Σ, formată dintr-un cilindru de rază R și lungimea l egală cu lungimea mașinii și din două discuri de rază R. Întrucît vectorul Poynting nu are componentă axială, puterea electromagnetică transmisă spre interiorul suprafeței închise Σ va fi dată numai de integrala pe suprafața cilindrică, cu elemente de suprafață

$$\bar{n}\mathrm{d}s = -\bar{r}_0 Rl\mathrm{d}\theta$$

Rezultă

$$\underline{S}_\Sigma = \frac{1}{2}\int_\Sigma (\bar{E} \times \bar{H}^*)\bar{n}ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underline{E}(R, \theta)\underline{H}_\theta^*(R, \theta) Rl d\theta \tag{14}$$

Intensitatea cîmpului electric $\underline{E}$ și componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic $\underline{H}_\theta$ sînt funcțiuni periodice de unghiul θ, alternate simetric cu perioada $\frac{2\pi}{p}$, p fiind numărul de perechi de poli ai mașinii. Aceste mărimi se pot reprezenta prin serii Fourier, de forma

$$\begin{aligned} \underline{E}(R, \theta) &= \sum_\nu \underline{E}_\nu(R)e^{j\nu p\theta} \\ \underline{H}_\theta(R, \theta) &= \sum_\nu \underline{H}_\nu(R)e^{j\nu p\theta} \end{aligned} \tag{15}$$

în care ν sînt numere întregi, impare.

În virtutea ortogonalității armonicelor spațiale, după calcule simple se obține

$$\underline{S}_\Sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sum_\nu \underline{E}_\nu(R)e^{j\nu p\theta})(\sum_\nu \underline{H}_\nu^*(R)e^{-j\nu p\theta}) Rl d\theta$$

sau

$$\underline{S}_\Sigma = \pi Rl \sum \underline{E}_\nu(R)\underline{H}_\nu^*(R) = \sum \underline{S}_\nu(R) \tag{16}$$

unde

$$\underline{S}_\nu(R) = \pi Rl \underline{E}_\nu(R)\underline{H}_\nu^*(R) \tag{17}$$

este puterea complexă corespunzătoare armonicii spațiale ν, transmisă prin interiorul suprafeței cilindrice de rază R.

Amplitudinile complexe $\underline{E}_\nu$ și $\underline{H}_\nu$ ale armonicilor spațiale ale mărimilor de cîmp care intervin în expresia puterii transmisă se pot pune în corespondență cu mărimile de circuit corespunzătoare unei înfășurări trifazate (sau, în general, polifazată), cu pas diametral avînd w spire pe fază.

În înfășurarea fazei de referință, intensitatea cîmpului electric axial dă tensiunea de fază

$$\underline{U}_\nu(R) = 2wl\underline{E}_\nu(R)/\sqrt{2} \tag{18}$$

De asemenea, intensitatea cîmpului magnetic tangențial $\underline{H}_\nu(R)$ corespunde unui sistem trifazat simetric de curenți, curentul fazei de referință avînd valoarea

$$\underline{I}_\nu(R) = \pi R\underline{H}_\nu(R)/(3\sqrt{2}w) \tag{19}$$

Se observă ușor că puterea complexă corespunzătoare mărimilor de fază astfel definită

$$\underline{S}_\nu(R) = 3\underline{U}_\nu(R)\underline{I}_\nu^*(R) \tag{20}$$

coincide cu puterea complexă (17) transmisă prin suprafața cilindrică de rază R, calculată din mărimi de cîmp.

Rezultă că mărimile de fază $\underline{U}_\nu$, $\underline{I}_\nu$ definite prin relațiile (18) și (19) reflectă corect transferul de putere între diferitele domenii de cîmp separate prin suprafețe cilindrice și pot fi folosite la definirea unor circuite echivalente corespunzătoare părților mașini ielectrice, *separat pentru fiecare armonică spațială.*

5. Concluzii

Metoda prezentată, bazată pe folosirea permeabilității magnetice echivalente, permite descompunerea problemei de cîmp electromagnetic a mașinii asincrone în subprobleme separate pentru cele două armături (stator și rotor) și reduse la acele subdomenii care cuprind informația referitoare la structura geometrică a fiecărei armături.

Astfel, subproblema corespunzătoare fiecărei armături se rezolvă numai pentru o zonă de fază (la număr întreg de crestături pe poli și fază), iar la rotorul cu înfășurare în colivie este suficientă rezolvarea problemei corespunzătoare unui pas dentar.

Aceste facilități permit folosirea unei memorii operative reduse pentru rezolvarea problemei de cîmp în condițiile unei descrieri mai fidele a structurii domeniului.

Utilizarea acestei metode pentru determinarea caracteristicilor funcționale și a parametrilor rotorului și statorului mașinii asincrone va forma obiectul unor lucrări, separate, în care se vor prezenta și rezultatele obținute.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. S. Sergheev, N. V. Vinogradov, F. A. Goriainov*, Proiektirovanie elektriceskih mașin Moskva. Izdatelstvo energhia 1969.
2. *C. Bălă*, Proiectarea mașinilor electrice. București. Editura didactică și pedagogică 1967
3. *Per Berget*, The finite element method applied to rotating electrical machines. The University of Trondheim. Norway 1978.
4. *P. Silvester J. C. Sabonadiere, A. Foggia*, IEEE Trans. vol P. A. S. — 94, 1975
5. *S. Williamson*, IEE Proceedings — B, nr. 2, 1980.
6. L. P. Neiman, Poverhnostnii effect v ferromagnetnih telah. Leningard — Moskva, Gosenergoizdat, 1949.
7. *N. A. Demerdash, T. V. Nehl*, Trans. IEEE on Magn., 1978, v. 15, no. 6.
8. *P. G. Popov, In. A. Sumilov*, Elektricestvo 1983, nr. 3.

9. *A. Moraru*, R. R. d. S. T. Série Electrotechnique et Energétique — 1970.
10. *M. Covrig*, Contribuții privind îmbunătățirea performanțelor funcționale ale seriilor de motoare asincrone. Teză de doctorat IPB 1983.

Method for Parameters Determination of the Induction Machine by Electromagnetic Field Solution

A new method for solving the electromagnetic field in the induction machine is presented, using the equivalent permeability in sinusoidal steady state.
The electromagnetic field problem separately is solved for the stator and the rotor armatures, and then are correlated, taking into account the possibilities given by the equivalent permeability method. This allows a more accurate geometrical description of the machine for a given operating memory and spares computational time.

c. z. :621. 396. 625

MODELLING THE LEAKAGE MAGNETIC FIELD OF THE MAGNETIC RECORDING HEAD

D. STANOMIR *

There is presented a general method for obtaining some aproximate formulae for the leakage magnetic field of the magnetic recording head.

1. Introduction

Longitudinal magnetization is currently used in magnetic recording. In such a situation the leakage magnetic field is the useful component. It is therefore of interest to know how to model the leakage field of the magnetic recording head. Here we present the exact theory, the approximative one and discuss some other models.

2. The exact theory

Consider a transversal section in a recording head (fig. 1.a) supposed infinite in width, therefore the system is 2-dimensional. The right edge has a magnetic potential $v_0/2$ whereas the left has $-v_0/2$. The relative permeability of the two magnetic pieces is taken to be infinite.

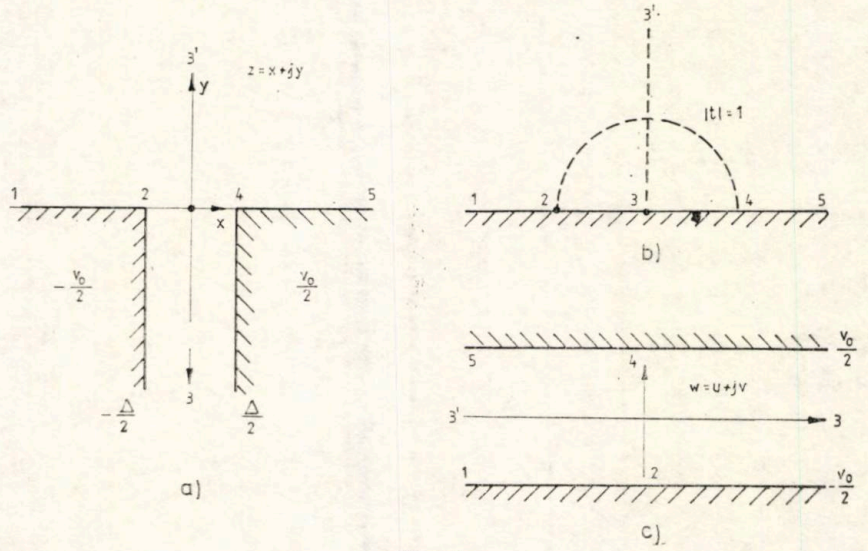


Fig. 1

* Associate Prof., Chair of Radiocommunications

To find the constant potential lines in the $z = x + jy$ plane we transform it into a band of width v_0 in the $w = u + jv$ plane. First, we transform the z plane into the $t = t_a + jt_b$ plane so that the domain which is at the left of the path 1—2—3—4—5 in the z plane pass into the upper half space, $t_b > 0$, in the t plane, (fig. 1.b). This is achieved by a Schwarz-Cristoffel transformation, wich is given by [3]:

$$z = \frac{\Delta}{\pi}\left[\sqrt{t^2-1} + \arcsin\frac{1}{t}\right], \tag{1}$$

where Δ is the lenght of the gap.

Next, we transform the t upper plane, $t_b > 0$, into a band of width v_0 in the w plane, (fig. 1.c). This is achieved trhough the transformation:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{v_0}{\pi}\ln t + j\frac{v_0}{2}, \\ t &= t_a > 0, \qquad \ln t \text{ isreal.} \end{aligned} \tag{2}$$

By use of (1) and (2) we can find the image in the z plane of the $v =$ const. lines in the w plane.

It is of interest to find the expression of the magnetic field H. To this end we take into account that in the air the field comes from the potential v. Therefore we have successively

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{dt}\left[\frac{dz}{dt}\right]^{-1} = -H_0\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, \quad H_0 = \frac{v_0}{\Delta}, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x}, \\ j\frac{dw}{dz} &= H_x - jH_y, \end{aligned} \tag{3}$$

from wich we get

$$H_x - jH_y = -j\frac{H_0}{\sqrt{t^2-1}}. \tag{4}$$

We want to express H_x in terms of y, on the line $3 - 3'$. First we put $t = 0 + jt_b$ and (1) and (4) become respectively

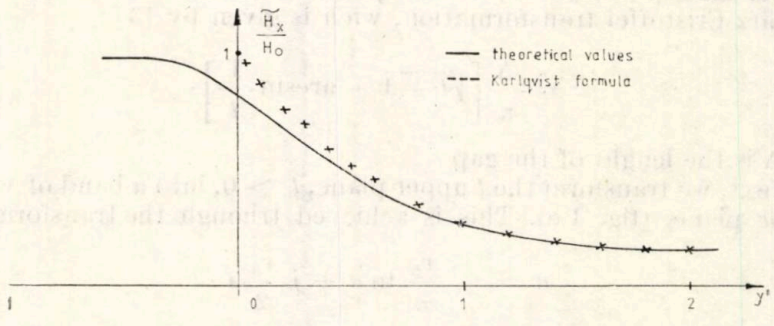
$$y = \frac{\Delta}{\pi}\left[\sqrt{t_b^2+1} - \operatorname{argsh}\frac{1}{t_b}\right], \tag{5}$$

$$H(0 + jt_b) = -H_0\frac{1}{\sqrt{t_b^2+1}}. \tag{6}$$

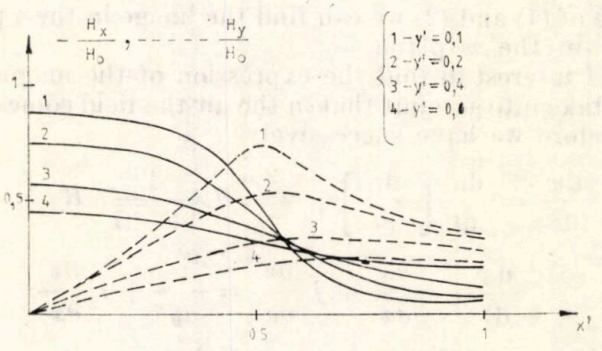
If we eliminate t_b by use of (5) and (6), we get

$$\tilde{H}_x(y) = H_x(0,\ y). \tag{7}$$

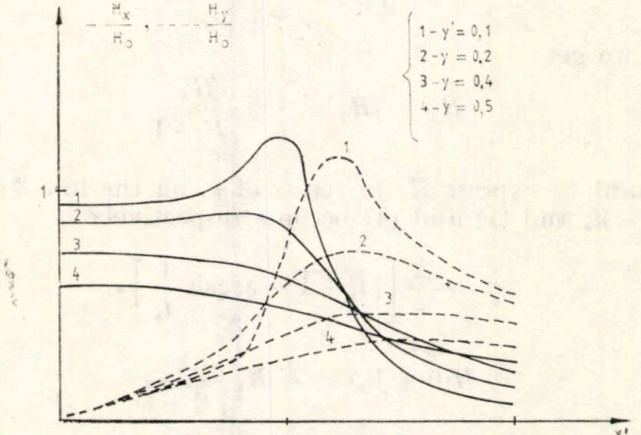
This cannot be done analytically but it can be obtained finding different pairs $(\widetilde{H}_x, y)$ for prescribed values of t_b. By this way we get a functional relation that is plotted graphically in the figure 2. a (the full line).



a)



b)



c)

Fig. 2

3. Approximate solutions

One can approach the problem in another way. We are interested in computing the filed in the upper plane, y 0, (fig. 3. a). If the relative permeability is infinite, then the distribution of the magnetic potential

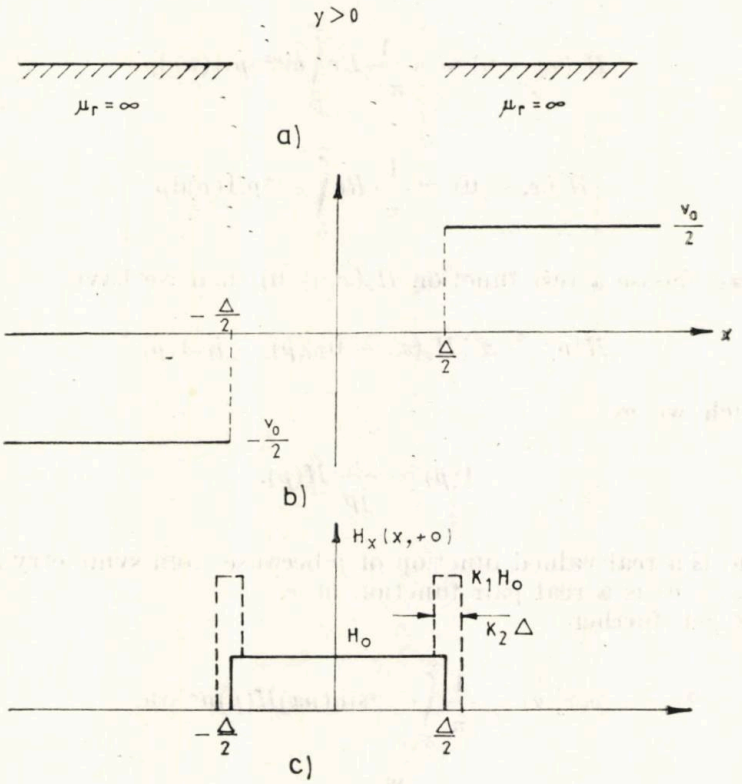


Fig. 3

on the line $y = 0$ is as it is shown in the figure 3. b. On the domain $-[-\Delta/2, \Delta/2]$, v is not known but it can be approximated by an adequate distribution. Because v satisfies the Laplace equation in $y > 0$, it can be represented through the integral

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^\infty e^{-py} e^{jpx} A(p) dp, \tag{8}$$

where $A(p)$ is a complex valued function which depends on the boundar conditions. If v is known, then H_x and H_y are given by

$$H_x(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

On the $y = +0$ line we get

$$v(x, +0) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^\infty e^{jpx} A(p) \mathrm{d}p,$$

$$H_x(x, +0) = \frac{-1}{\pi} Re \int_0^\infty e^{jpx} jpA(p) \mathrm{d}p, \tag{9}$$

$$H_y(x, +0) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^\infty e^{jpx} pA(p) \mathrm{d}p$$

If we choose a test function $H_x(x, +0)$ then we have

$$\hat{H}(p) \triangleq \mathcal{F}[H_x(x, +0)](p) = jpA(p),$$

from which we get

$$A(p) = \frac{1}{jp} \hat{H}(p). \tag{10}$$

Here $\hat{H}(p)$ is a real valued function of p because from symmetry it comes that $H_x(x,+0)$ is a real pair function of x.

We get further

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-py} \sin(px) H(p) p^{-1} \mathrm{d}p,$$

$$H_x(x, y) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty e^{-py} \cos(px) H(p) \mathrm{d}p, \tag{11}$$

$$H_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-py} \sin(px) H(p) \mathrm{d}p.$$

Because $H_x(x, +0)$ has a bounded support and has a bounded variation, its Fourier transform is decreasing as least as p^{-1} for $p \to \infty$. Therefore we denote

$$\cos(px) H(p) = \frac{1}{p} C(p\,;\, x),$$

$$\sin(px) H(p) = \frac{1}{p} S(p\,;\, x), \tag{12}$$

and (11) becomes

$$H_x(x,y) = \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty e^{-py}p^{-1}C(p\,;\,x)\,\mathrm{d}p,$$
$$H_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-py}p^{-1}S(p\,;\,x)\,\mathrm{d}p. \tag{13}$$

In order to get a more compact form for (13) we denote by $\mathscr{L}$ the Laplace transform and introduce the functions

$$\mathscr{L}[C(\underline{p}\,;\,x)](q) = \hat{C}(q\,;\,x),$$
$$\mathscr{L}[S(\underline{p},\,x)](q) = \hat{S}(q\,;\,x) \tag{14}$$

In (14) the dummy variable is underlined.

By use of a well known property of the Laplace transformation [2]

$$\mathscr{L}[f](s) = F(s) \to \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(q)\mathrm{d}q \tag{15}$$

(the integral of F is supposed to exist), we get the final forms

$$H_x(x,y) = \frac{-1}{\pi}\int_y^\infty \hat{C}(q\,;\,x)\,\mathrm{d}q,$$
$$H_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \hat{S}(q\,;\,x)\,\mathrm{d}q. \tag{16}$$

A test for the validity of the approximation by the use of a specified $H_x(x, +0)$, is the coincidence of the „middle" longitudinal field so calculated $H_x(0, y)$ with the true dependence (7), given in the figure 2.a.

4. Karlqvist's formulae

The simplest way to approximate the true distribution is to take $H_x(x, +0)$ constant on the interval $(-\Delta/2, \Delta/2($ as it is shown in the figure 3, the full line. For this choice we have

$$H_x(x, +0) = \begin{cases} H_0, & x \in (-\Delta/2,\ \Delta/2), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{17}$$

We get further

$$H(p) = 2H_0 p^{-1}\sin\left(p\frac{\Delta}{2}\right), \quad p \neq 0,$$

$$C(p\,;\,x) = 2H_0\sin\left(p\frac{\Delta}{2}\right)\cos(px),$$

$$S(p\,;\,x) = 2H_0\sin\left(p\frac{\Delta}{2}\right)\sin(px)$$

By denoting

$$\frac{\Delta}{2} + x = \xi_+, \quad \frac{\Delta}{2} - x = \xi_-,$$

we obtain

$$\begin{aligned} C(p\,;\,x) &= H_0[\sin(p\xi_+) + \sin(p\xi_-),], \\ S(p\,;\,x) &= H_0[\cos(p\xi_-) - \cos(p\xi_+)], \\ \hat{C}(q\,;x) &= \frac{\xi_+}{q^2+\xi_+^2} + \frac{\xi_-}{q^2+\xi_-^2}, \\ \hat{S}(q\,;\,x) &= \frac{q}{q^2+\xi_-^2} + \frac{q}{q^2+\xi_+^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

By deleting the sig ı minus of H_x and by use of (15) we get

$$H_x(x,y) = \frac{H_0}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1+2x'}{2y'} + \operatorname{arctg}\frac{1-2x'}{2y'}\right],$$

$$H_y(x,y) = \frac{H_0}{2\pi}\ln\frac{(2y')^2+(1+2x')^2}{(2y')^2+(1+2x')^2}, \tag{19}$$

$$x' = x/\Delta, \quad y' = y/\Delta.$$

which constitute the Karleqvist's formulae, [1].

In order to check the validity of (19), we write the expression of the „middle" field

$$\widetilde{H}_x = H_x(0,\,y) = \frac{2H_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2y'}\right),\ y' > 0,$$

and represent it with star-like points on the figure 2. a. From this representation it is seen that the last formula gives good agreement with the exact one, the maximum error is 20 % for $y' = +0$. This is satisfactory because there is always an inherent gap between the magnetic head and the magnetic tape.

The fileds H_x and H_y, given by (19) are plotted versus x, for various gap vidths y' in the figure 2.b.

5. New approximation formulae

It is known that for the exact theory the the two fields H_x and H_y become infinite at the points $(-\Delta 2, +0)$ and $(\Delta/2, +0)$. For y' exceeding some value the longitudinal field H_x exhibits a maximum whereas for y' larger than that value there are no maxima. As it is seen Karlqvist's formulae do not give maxima for H_x. To get a distribution which can furnish maxima for H_x we propose a modified distribution of $H_x(x, +0)$. This is given by

$$H_x(x, +0) = \begin{cases} H_0, & x \in \left[-\frac{\Delta}{2}(1-k_2), \frac{\Delta}{2}(1-k_2)\right], \\ k_1 H_0, & x \in \left[-\frac{\Delta}{2}(1-k_2), -\frac{\Delta}{2}(1+k_2)\right], \\ & x \in \left[\frac{\Delta}{2}(1-k_2), \frac{\Delta}{2}(1+k_2)\right], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The coefficients $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \leqslant 1$, are to be chosen so as to model various situations (maxima exhibition). If $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, we get Karlqvist's formulae.

We get

$$\frac{pH(p)}{H_0} = 2k_1 \sin\left[p\frac{\Delta}{2}(1+k_2)\right] - 2(k_1-1)\sin\left[p\frac{\Delta}{2}(1-k_2)\right]$$

and further

$$\frac{C(p;\,x)}{H_0} = k_1 \sin\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1+k_2)+x\right]\right\} + k_1 \sin\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1+k_2)-x\right]\right\} -$$

$$-(k_1-1)\sin\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1-k_2)+x\right]\right\} - (k_1-1)\sin\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1-k_2)-x\right]\right\},$$

$$\frac{S(p;\,x)}{H_0} = k_1 \cos\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1+k_2)+x\right]\right\} + k_1 \cos\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1+k_2)-x\right]\right\} -$$

$$-(k_1-1)\cos\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1-k_2)-x\right]\right\} + (k_1-1)\cos\left\{p\left[\frac{\Delta}{2}(1-k_2)+x\right]\right\}.$$

By analogy with the calculations made in the previous section, we get

$$H_x(x, y) = \frac{1}{\pi}\left\{ k_1 \operatorname{arctg} \frac{1 + k_2 + 2x'}{2y'} + k_1 \operatorname{arctg} \frac{1 + k_2 - 2x'}{2y'} - \right. \tag{20}$$

$$\left. - (k_1 - 1)\operatorname{arctg} \frac{1 - k_2 + 2x'}{2y'} - (k_1 - 1)\operatorname{arctg} \frac{1 - k_2 - 2x'}{2y'} \right\},$$

$$H_y(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left\{ k_1 \ln \frac{(1 + k_2 + 2x')^2 + (2y')^2}{(1 + k_2 - 2x')^2 + (2y')^2} - \right.$$

$$\left. - (k_1 - 1)\ln \frac{(1 - k_2 + 2x')^2 + (2y')^2}{(1 - k_2 - 2x')^2 + (2y')^2} \right\}.$$

In the figure 2.c the fields H_x and H_y, given by (20), are plotted versus x' for various y'. The values of the parameters have been

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 0{,}1.$$

Conclusions

A general approach to the modelling the leakage field of the magnetic heads is given and a new formula for approximation is presented. This may be of interest when the maxima of the longitudinal magnetic field are to be taken into account.

REFERENCES

1. *D. Karlqvist*, Trans. Roy. Inst. Stockholm 86 (1954) pp. 1–27.
2. *P. M. Morse, H. Feshbach*, Methods of theoretical physics, vol. I and II, New York, McGraw-Hill, 1953.
3. *D. Stanomir*. Electroacustica, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.

Modelarea cîmpului de dispersie al capului magnetic de înregistrare

Este prezentată o metodă generală de obţinere a unor formule aproximative pentru cîmpul de dispersie al capului magnetic de înregistrare. Ca un caz particular se obţine formula lui Karlqvist. Este propusă o nouă aproximare care pune în evidenţă supracreşterea componentei longitudinale, în conformitate cu teoria exactă.

C Z.: 681. 327. 8.

DIGITAL COMMUNICATION AND TRANSFER OF TECHNOLOGY

G. V. BAFAS*

The future of digital telephony can on the one hand be seen as a gradual introduction of digital transmission and switching equipment in the existing network and on the other as a continuous development of digital technology towards the Integrated Services Digital Network. The transition to digital technology is characteristic of the degree of modernization. Advanced technologies both in hardware and software provide the basis for the design of a new full digital switching system that can better serve the present and the future needs of Telephone Administrations than previous designs, while at the same time essentially avoiding most of the operational problems of those conventional designs. The important economic-technical advantages which the digital transmission and switching technique offers make sure the introduction of it to all the communications networks. But the new technique is of very high software and hardware technology and it is obvious that the phase of its introduction and its adaptation to the existing analog environment creates important problems. The problems which are related to the introduction of the digital technique to an analog telephone environment as well as the possibility of the optimum technoeconomical efficiency of the digital technique are directly related to the specific system which every country chooses. This paper presents an introduction of the various systems of digital technique as well as an international technological review in the field of telecommunications and electronics, and also the possibilities of technology transfer for the establishment of a local electronics company for the production of telecommunication equipment of digital technique in developing countries is examined.
At te end, those preconditions which assure the existence of essential technology transfer in the particular subject, in such a way that the independent further technological development of the bought know-how is ascertained, are determined.

1. Introduction

Communications technology for the next ten years shows prospects that can be adequately described by the world metamorphosis.
A completely new type of network including technology, the economy and society will emerge in several „pupation" stages from the present-day structure of technology and services.
The following important and obvious advantages which the digital telecommunication offers, make necessary the fastest possible introduction of it to the telephone network:

— Saving of the required space, which in the case of the transit-toll exchanges reaches the 80 %.

— Every conversation direction uses a separate channel, as in the case of the 4-wire conventional technique.

* Prof., National Technical Univ. of Athens

— Multiple use of the existing circuits by applying the multiplexing technique with the time division.

— Firm telecommunicative quality, independently from the length of the line, by applying the known signal repeaters.

— The digital technique makes the introduction of more services and facilities for the subscribers, as Data, Facsimile, Teletex, Videotex and Telex, possible and easy.

— Permits the creation of telecommunicative network with very high transmission speeds, which reach and the 565 Mbit/sec.

— The digital technique of transmission, requires a relatively very low signal-to-noise ratio, because it uses a wide frequency spectrum.

In the telecommunications field two major technological changes are occuring at almost the same time :

— the introduction of digital technique for both transmission and switching and

— the accomodation of non-voice services on the previously voice-only telephone network.

There are several different strategies for introducing digital switching and transmission into existing communications networks. Since the digital introduction process will extend over a ten to twenty years period in most countries the need was recognized for a basic understanding of mixed digital and analog network for voice and non voice services.

The main issue in discussing digital introduction is digital switching technique and its integration with digital transmission. Digital transmission has been used at several levels of the hierarchy for some time where it is already less expensive than analog multiplex technique. For digital local switching only a fully digital, distributed control exchange design is now operationally less expensive for administration application in an analog environment as a replacement for an analog electromechanical exchange. For transit applications, even with only analog trunks, digital switching now has a replacement cost advantage.

The criteria for digital network planning should not be the minimum number of analog-to-digital conversion units, as has been quite mistakingly quoted in several technical articles, but the minimum network expansion expenditure.

There are three alternative doctrines for the introduction of the digital technique :

— extend existing exchanges in their own technology that means retain and extend the existing analog equipment.

— use of remaining building space for digital equipment, that means mix analog and digital equipment in the same building

— replace existing analog units with digital ones.

Choices were made using the pragmatic network planning approach in much the same way as for trunk group justification, namely, examine each case via comparative global economic network studies and make decisions accordingly.

In the area of digital transit exchanges there is an interesting choice between a purely transit digital exchange and use of the transit capabilities in-

herent with digital local exchanges, the so called "distributed tandem concept".

Since these local units all have four-wire transmission and there is no essential difference between lines and trunks, the marginal cost for establishing a transit point coincident with a digital local exchange may be far lower than installing a separate transit exchange.

The above-mentioned case offers the following very important advantages :

— in rural networks, small digital exchanges can provide economical transit facilities for other local exchanges, avoiding the long trunk back-haul to a city transit exchange

— in city networks, transit points can be established wherever there is a digital local, markedly reducing the need for new transit units, especially new analog ones, until there is sufficient traffic development to justify a separate digital transit exchange.

The choice of the digital technique's technology and the introduction method to the existing communications network must seriously take into consideration and the future needs for the creation of the Integrated Digital Network (IDN) as well as its further development to the Integrated Services Digital Network (ISDN).

Considering all the different paths, the uncertainty of future planning due to expected further advances in technology the multitude of data traffic types known now and the probability that new data or other non-voice services will be required within the operational life times of the digital exchanges installed in the next few years, there is a clear requirement for a solution with a single digital switching system which :

—can be extended in the future with equipment taking advantage of later technology and without rearrangement of the existing environment.

— will cover the full range of line and trunk sizes, economic for small independent rural exchanges, that can without any consequences expand up to hundred thousand lines exchanges

— will provide services via equipment extensions that do not require modification of already installed equipment

— will be applicable as local and toll and combined exchanges

— fully meets the pragmatic introduction recommendations for IDN and ISDN

— will have the possibility, technoeconomically, of optimum adaptation to the existing analog environment.

The whole subject of the introduction of the digital technique of communications and the creation of IDN and ISDN networks is very complicated and can not be completed in one article.

This paper will give a brief description of the three known architectures of digital exchanges and guidances for the optimum technoeconomical choice of the systems of digital technique.

Also, it will examine the possibilities for the essential technology transfer and the establishment of local electronics industry for the production of telecommunications equipment.

2. Description of the Architecture of Digital Communication Systems

The technology of the systems of digital communication is basically characterized by the architectural structure of the system and the integration degree of the components it uses.
The first parameter, that is the architecture of the system is directly influenced by the wide development of informatics because it is directly related to the science of computers and the automatic control. The second parameter, that is the integration degree of the components, refers more to the special components which have direct relation with special telecommunication functions, mainly the subscriber stage.
The digital electronic exchange is consisted of the following basic subsystems :

— Subscriber stage.
— Central Control.
— Switching network.

The digital subscriber stage requires specialized integrated circuits, which are used only in the filed of telecomunication and therefore it is consequent that internationally the manufacturers who have telecommunicative experience and the advanced technology, of microelectronics and the applied computer aided design, have technological precedence.
Since the selector network, in the subscriber stage is digital all analog functions must be performed in the line circuit, individually for each subscriber line.
The main line circuit functions are the following :

— Current feeding
— Polarity inversion
— Call detection
— Detection of dial pulses
— Ringing
— Answer detection
— Ring tripping
— Line and line circuit testing
— Overvoltage protection
— Changeover between two-wire and four-wire (hybrid)
— Analog/digital and digital/analog conversion.

Today we already are in the second generation of line circuits during which, the line circuit functions are carried out by two components and specifically.

— Subscriber Line Interface Circuit (SLIC), which contains functions for power feeding, receiving dial pulses, circuit for detecting calls and answers and replace the transformator hybrid of the first generation. The SLIC also contains circuits for the realization of the polarity inversion, which in the first generation was carried out by a relay and drive circuits for the two remaining relays for ringing and testing.

— Subscriber Line Audio Circuit (SLAC), which contains the functions : analog/digital conversion and filtering, as well as functions for stored program control of levels, the two-wire impedance and the hybrid balance. The control signals required for SLIC are also generated in SLAC.

In a few years time, with the introduction of a third generation of SLIC and SLAC, the trend of LSI technique towards the ise of higher voltages will be exploited in order to replace, in an optimum economical way, the relay functions that still remain on the subscriber stage.
On the specific concentration of the subscriber stage, that is from the ratio of the number of subscriber lines of a subscriber unit to the connection circuits of the same unit with the switching network of the system, depends the conveyance capability of the telephonic traffic which the exchange has during the maximum telecommunication traffic which the exchange will face.
The central control of the system is in a way the centre of decision making for the way of carrying out those functions which are necessary for the forwarding of the calls and the satisfaction of the subscriber's demands. On the capacity of the central control depends the maximum number of the call attempts, successful and unsuccessful, which the system can carry out during a specific period of time and it is given in Busy Hour Call Attempts (BHCA), that is attempts for telecommunicative calls during the period of the highest possible telecommunicative traffic, which the specific digital exchange is specified.
Referring to the central control of digital systems, it must be emphasized that the control method which every system uses, is the basic criteria for the determination of the technological level of all the system. The control method decisively influences not only the functionality of the system, but it also has important effect in the production cost of all the system, as well as in the function's cost for the future users, in relation with the prerequired capacity always and the extension ability of them.
In digital communications systems the distributed central control has prevailed, which in continuation — depending on how much distributed is — divided into the three following categories :

— Centralized control
— Control with multiprocessing
— Fully distributed control.

Fig. 1. shows the principle of digital exchange with centralized control. The big problem which the first generation of digital systems with centralized control had, was the low limit in BHCA which didn't exceed the 200.000.

As we move into the age of the information society, an inevitable consequence is the rapidly increasing demands that will be placed on communications networks. As the density of urban populations grows and patterns of telephone usage change, that will also pose additional burden on the data processing capacity of the exchanges.
Last, but not least, new functions and futures increase the real time load on digital switches.

All these factors will combine to place heavy demands on the data processing power and flexibility of the switching system.

This serious problem of the capacity of the system with centralized control was solved today by ERICSSON company with the supercomputer APZ 212. An AXE exchange equiped with the APZ 212 central processor can handle 800.000 BHCA with a normal switching function mix.

At 100 sec average holding time this corresponds to a switched traffic of some 22.000 erlang.

This traffic then corresponds to tandem exchanges with some 60.000 ports or local exchanges up to some 100.000 subscribers.

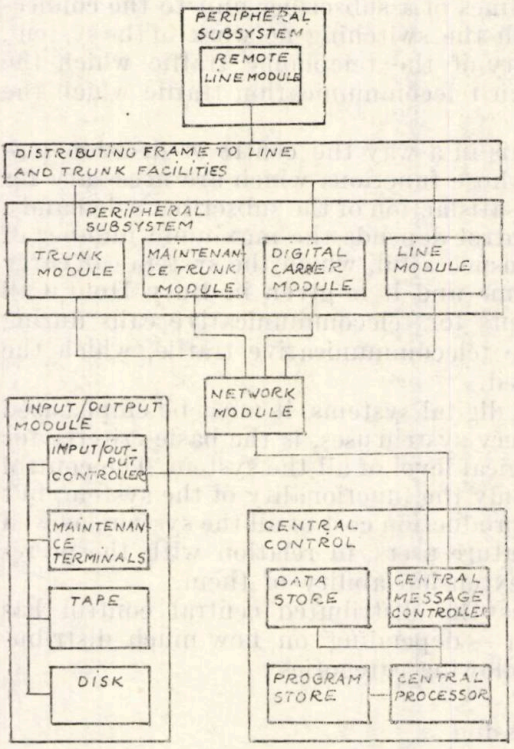


Fig. — 1 Centralized contrnl arhitecture.

So, for the users of the systems with centralized control, only the problem of the appearance of more that two faults at the same time still remains, when all the exchange is totally put out of function. Fig. 2. shows the function principle of a digital system with multiprocessing control. The supporters of the centralized control consider the development of the multiprocessing disadvantageous for the following reasons :

— One is the fact the SPC data processing is a real time task, whereas standard microprocessors are not optimised for real time operation. They are optimised for general purpose calculation in a batch processing environment and don't perform as well in real-time operation.

— The other problem is the burden of micro-to-micro-communications overheads which must be carried and which can cut dramatically the effective increase in processing power achieved by multiplying up processors.

— In addition, as the number of micros increases so the memory must be multiplied, since each micro has its own memory.

On the other hand we have the supporters of the multiprocessing control who assert that the development of the multiprocessing requires high know-how software, which — at the moment — Europe does not have and therefore can not develop multiprocessing systems. Because the multiprocessing offers — to the users — uniformity of material due to that it uses everywhere the same microprocessors and modular increasing of the capacity of the exchanges without anyimportant consequences.

The most important advantage of the multiprocesssing control — towards the centralized — is that the system is put out function after the appearance of $2n + 1$ faults where n is the number of the microprocessor of the multiprocessing, as well as the fact that by applying standard hardware it attains important advantages for the users of the system by developing high software technology.

Fig. 3 shows the function principle of the digital system with fully distributed control.

The fully distributed control was the most revolutionary design in the digital communications technique. The initial circumspections regarding the practical application of the system have been completely raised

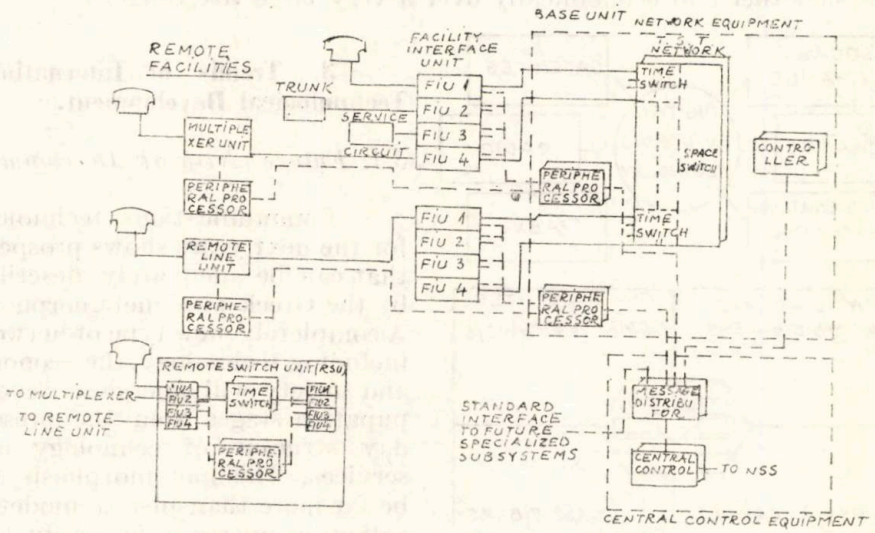


Fig. 2—Multiprocessing architecture.

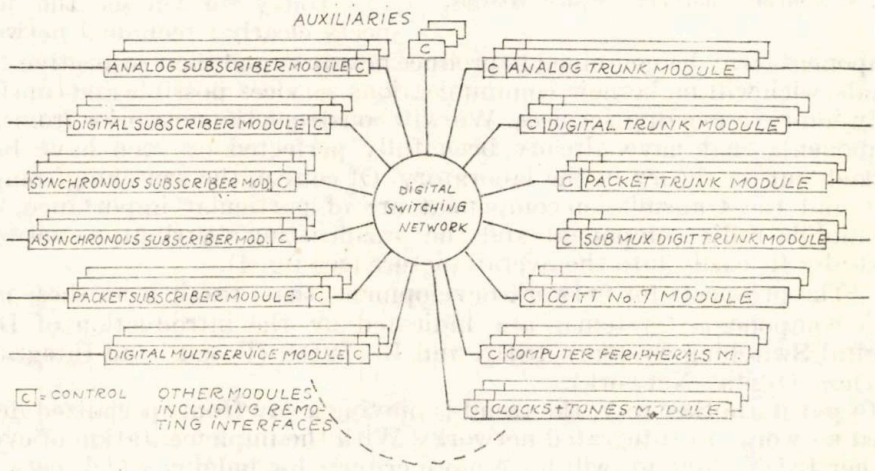


Fig. 3—Fully distributed architecture.

after the successful function of it in praxis. The development and the construction of the system might have had problems, but for the users the advantages are obvious.

The distributed control architecture has been designed to improve exchange flexibility, utilize advanced component technology and overcome the limitations of central control systems. Conceptually simple, it consists

of a number of autonomous terminal modules each with its own microprocessor connected to the digital switching network. Smooth growth over a wide size range and ability to incorporate new services and technologies ensure, that the exchange is „future safe" that means, provide a single design solution over the total application range in both size function and grow smoother and economically over a very large size range.

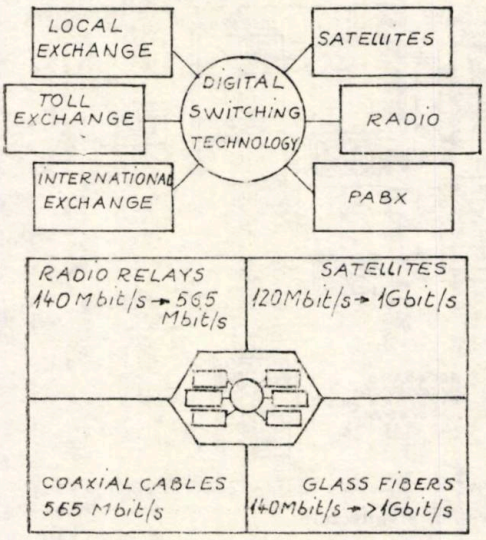


Fig. 4. Switching and Transmission Systems.

3. Trends of International Technological Development.

3.1. Future Network Development

Communications technology for the next years shows prospects that can be adequately described by the Greek word metamorphosis. A completely new type of network including technology, the economy and society will emerge in several pupation stages from the present day structure of technology and services. This metamorphosis will be far more than just a modernization or increase in production output.

Today we can see the prospects clearly : technical network components will be combined to produce networks and their respective terminals, wich will make new communications services possible and considerably improve existing services. We will construct the networks from the components that have already been fully perfected or wich have been worked out in theory in the laboratory. Of course, the switching component and the transmission component are of particular importance, but the mobile radio component and the broadcasting distribution network must also fit easily into the overall picture (see fig. 4).

The prospects for network development that result from these network components (systems) are indicated by the introduction of DIV (Digital Switching System), ISDN and B—ISDN (Broad band Integrated Services Digital Network).

Or to put it another way, the trend is moving away from specialized dedicated networks to Integrated networks. With the implementation of every further ISDN stage we will have more criteria for judging which network structures are compatible with the "technotope" and which, to remain in the same jargon, violate "network ecology".

Major individual features clearly show how common technical characteristics arise during the transition from digital switching technology to ISDN and ultimately to broad-band ISDN.

The DIV elements of "decentralized control, digital 64 Kbit/sec switching networks and modular design" will be taken over under ISDN.

There are several possible strategies for reaching the commonly defined goal of B-ISDN.
Fig. 5. shows advantages and disadvantages of the demand-oriented "evolutionary strategy" and the "acceleration" strategy.

target: B-ISDN	advantages	disadvantages
● evolutionary strategy (1)	—first users' demand iteratively covered (teleconferencing, data channels, distribution networks)	—no mass production (fiber, converter, VLSI)
	—no lead-time required	—no mass utilization (picture phoning)
● acceleration strategy (2)	—generation of standardized future system	—lead-time required
	—utilization of mass production	—R&D cooperations required
	—high potential of demand	—high risk

Fig. 5. Integration strategies.

4. Transfer of Technology in Digital Communications Technique

The question of the economic effects of communications technolgy will take on even greater significance in the next decade, even if we do not subscribe to the expression "the information society", with which many describe the development of the next decades.
The primary task of communications technology is to develop and manufacture demand-oriented products and systems.
Users and operators want to and must use communications technology as an aid to increase productivity and for this reason all technological indications are pointing to the development of a modular and predictable infrastructure. From all that has been said thus far it is clear that the communications technology of the next few decades will not limit itself only to technical and economical aspects.
Rather, it must seek impulses from society as a whole and must provide impulses to society.

From the above-mentioned arises that the successful transfer of essential technology in the field of digital communications and informatics generally is in fact very difficult.
The success of such an investment for the establishment of National Electronics Company (NEC) depends on the methodology and the way, of the correct facing of the whole investment, taking seriously into consideration the particular of the specific subject.
Due to the fact that each country has a specific market of telecommunication equipment which can be directed from the state, there is and the particular infrastructure for the establishment of a NEC aiming to the highest possible local added value in the end product.
Naturally, the existance and success degree of essential technology transfer must be examined by another way and more especially from all the points of view of the subject.

In the specific case, the decision of one or two systems, must be at first made, by taking into consideration the advantages and disadvantages which derive from the decision.
After that, the choice of the systems must be made by scientific criteria, which will assure the choice of the system with the most and the most important technoeconomical advantages.
Papers [1] and [2] present methods — which are based on 18 scientific criteria — for the choice of digital communications systems.
In this paper I will only mention that the systems with distributed central control and contemporary subscriber stage with monolithic SLIC and SLAC have important technoeconomical advantages not only from the functionality point of view, but they also have the advantage of the easier assimilation of their technology from the fact that they have modular structure, and so their choice is advantageous.
For the final decision making for the establishment of a NEC aiming to the transfer and further development of a know-how of the production of digital technique's telecommunication equipment, the following actions are prerequired :

— Feasibility study of the whole investment.

— Comparison of the specific investment with other national investment projects.

— Determination of the production volume and signing of the relative contracts with the corresponding local state companies.

— Investigation of any existing local electronics industry and definition of its future role.

— Examination of the participation possibility of the existing local electronics industry in the new state company e. g. as shareholders and satellite producers of a part of hardware and software or of the whole.

— Research of the possibility of microelectronics technology transfer even on laboratory form but with the possibility of the production of integrated circuits for the satisfaction of a small part of the needs of NEC. Because, by that way the possibility of the access of a country to microelectronics and the computer Aided Design is assured.

— Detailed determination of the software and hardware technology wich will be transfered and simultaneous development of a program for the further development of the bought technology.

The specific realization might have more possibilities but let us refer to three of them :

— The cooperation in form of joint-venture with the foreign company from which the know-how will be bought.

— Participation in this joint venture and of the possible existing local industry, aiming to the assurance of specialized staff which is necessary for the starting off phase.

— Participation in NEC of future customers of the company's products, assuring by this way in advance an important export market and consequently the viability of NEC.

— Whichever the solution is, the choice of the systems or of the system must be derived from the correlation of the advantages and disadvantages of the systems (for the case of the choice of two systems).

— The technoeconomical evaluation of the digital technique's systems can be made being based on the 18 criteria that are suggested in [1] and [2].

— Thorough examination of the assimilation possibility of the know-how and the specific technology, estimating correctly the level of the labor and scientific force and the each time national reality for research and development in the field of informatics.

— Determination of the international situation in the area of informatics and particularly in the area of communications technology, for an agreement in advance of common research programs with the company from which the know-how will be bought, being the only solution for the assurance of the further development of the imported technology.

REFERENCES

1. *G. V. Bafas*, Technical and economic aspects of the choice of telephone switching systems. Telecon'84, Halkidiki, Greece.
2. *G. V. Bafas*, Methods for the optimum economic-technical choice of telephone switching systems. AI '85, Grindelwald, Switzerland.
3. *G. V. Bafas*, The application of distributed control in Integrated Digital Networks. AI'84, Innsbruck, Austria.
4. *G. V. Bafas*, Digital Telephony and analog environment. AI'84, Lille, France.

Comunicațiile numerice și transferul de tehnologie

În articol se prezintă cîteva structuri tipice de dezvoltare a rețelelor de telecomunicații existente în vederea adaptării lor treptate la serviciile suplimentare de comunicații (transmiterea imaginilor fixe sau mobile, a textelor de informare, a unor date ș. a.) realizîndu-se astfel „rețeaua numerică cu integrarea serviciilor" RNIS.

Se arată că stadiul de realizare a RNIS reflectă gradul de modernizare a rețelei de telecomunicații și se indică în ce mod se pot utiliza metodele cunoscute în domeniile hardware și software în vederea realizării RNIS. În articol se analizează diverse căi posibile pentru transferul de tehnologie care facilitează realizarea comunicațiilor numerice moderne pe rețeaua analogică existentă precum și perspectivele de dezvoltare în viitor.

C.Z.: 621. 317. 4

DOUĂ TIPURI DE TESLAMETRE PENTRU DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI SPAȚIALE A CÎMPULUI MAGNETIC LA ELECTROLIZOARELE ÎNTREPRINDERII DE ALUMINIU SLATINA

CARMEN GOLOVANOV, P. MANOLESCU, N. BADEA*

Repartiția spațială a intensității curentului electric și a cîmpului magnetic asociat, precum și variațiile în timp ale acestor parametri, determină cu precădere față de alți factori forma oglinzii metalului topit, de care depinde eficiența cuvelor de electroliză.

În articol sînt prezentate aparatele și rezultatele obținute la măsurarea — efectuată pentru prima dată în țara noastră — a distribuției spațiale a cîmpului magnetic de mare intensitate la cuvele de electroliză de la I.A.Slatina.

1. Alegerea tehnicii de măsurare a cîmpului magnetic

Repartiția spațială a intensității curentului electric și a cîmpului magnetic asociat determină cu precădere, față de alți factori, forma oglinzii metalului topit de care depinde eficiența cuvelor de electroliză a aluminei.

Consumul specific de energie electrică și randamentul de curent sînt influențate în mod defavorabil de agitația electromagnetică a metalului topit. Mișcarea și boltirea metalului topit pot fi reduse dacă cîmpul magnetic are o anumită simetrie în raport cu axele unui sistem de coordonate cu originea în centrul cuvei și cu axele paralele cu laturile cuvei.

Problemă de o deosebită importanță și actualitate, reducerea consumului energetic la producerea aluminiului impune măsurarea cîmpului magnetic la periferia cuvelor de electroliză a aluminei.

Măsurarea cîmpului magnetic intens din imediata vecinătate a electrozilor din cuvele de electroliză comportă determinarea componentelor H_x, H_y și H_z în direcția axelor Ox, Oy, Oz, în condiții relativ severe impuse :

— temperatura ridicată : 120—150°C la periferia cuvelor și 50—60°C la aproximativ 1 m distanță de cuve ;

— mediu toxic (fluor, oxid și bioxid de carbon) și cu mult praf ;

— intensități mari ale cîmpului magnetic : 1—200 Oe (80—16.000 A/m) ;

— eroarea de determinare : maximum $\pm$ 5 %.

Dintre aceste condiții, temperatura a reprezentat factorul restrictiv hotărîtor în alegerea tipului de traductor adecvat aparatului ce trebuia

* Conf. dr. ing., Șef. lucrări ing ; Ing., catedra Măsuri și aparate electrice

construit. Au fost evitate astfel traductoarele realizate din materiale semiconductoare (ca sonda Hall sau sonde bazate pe efectul Gauss magnetorezistiv), deoarece ar fi necesitat complicate instalații de răcire sau termostatare, precum și traductoarele bazate pe efectele magnetooptic (Faraday) și de rezonanță magnetică nucleară, implicînd instalații complexe și voluminoase [3].

Alegerea s-a oprit asupra a două tipuri de traductoare :

1. cu bobină sondă, bazat pe fenomenul de inducție electromagnetică și

2. cu miezuri feromagnetice, bazat pe fenomenul de apariție a tensiunii de frecvență dublă la magnetizarea mixtă produsă de cîmpul magnetic de măsurat (constant în timp) și cîmpul de excitație (de amplitudine și frecvență fixe).

Datorită construcției mai puțin complexe, primul teslametru realizat a fost cel cu bobină sondă, cu care s-au efectuat măsurători la I. A. Slatina în intervalul 29.05.1984 — 30.10.1984. În paralel cu aceste activități a fost începută realizarea celui de al doilea tip de teslametru, de complexitate mai mare, dar și cu performanțe superioare, a cărui construcție a fost finalizată în prima jumătate a anului 1985.

2. Teslametre realizate

2.1. *Teslametrul electronic cu bobină sondă*

2.1.1. *Principiul de funcționare* constă în integrarea tensiunii electromotoare de inducție $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ce apare la bornele unei bobine fără miez feromagnetic, cînd prin bobină este produsă o variație de flux magnetic $\Delta\Phi$ în intervalul de timp Δt. Cîmpul magnetic putînd fi considerat constant pe intervale de timp relativ mari, variația de flux $\Delta\Phi$ poate fi produsă prin rotirea bobinei sondă cu 180°, în care caz :

$$\Delta\Phi = -2\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{1}$$

unde $\Phi = \Phi_1 = -\Phi_2$ iar cîmpul magnetic care produce fluxul $\Phi = \Phi_1$ are același sens cu normala la bobină în poziția sa inițială.

Măsurarea fluxului magnetic pe această cale necesită utilizarea unui aparat integrator conectat la bornele bobinei, care să efectueze în intervalul de timp Δt integrala t. e. m. instantanee $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ rezultînd variația de flux :

$$\Delta\Phi = \int_1^2 \mathrm{d}\Phi = -\int_1^2 e\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Notînd : N — numărul de spire al bobinei
A — aria medie a unei spire
B — inducția cîmpului magnetic (medie, în bobină)
H — intensitatea cîmpului magnetic (medie, în bobină)

și considerînd un mediu neferomagnetic în interiorul bobinei (alamă și steclotextolit) pentru care permeabilitatea magnetică $\mu \approx \mu_0$ rezultă:

$$-\Delta\Phi = 2\Phi = 2NAB = 2\mu_0 NAH \tag{3}$$

Aparatul, care măsoară integrala t. e. m. induse în bobină în intervalul de timp Δt, va măsura, totodată, inducția și intensitatea cîmpului magnetic din bobină.

2.1.2. *Schema electrică a teslametrului* este redată în fig. 1 și este realizată cu un amplificator operațional βA 741 în montaj integrator inversor.

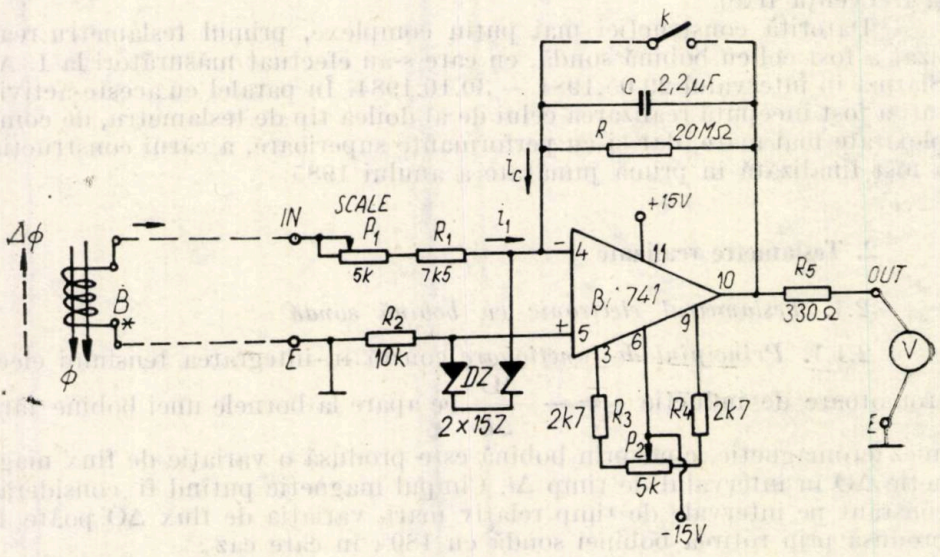


Fig. 1

Tensiunea de ieșire U_0 rezultă din relațiile:

$$i_1 \approx i_c$$

$$\text{și } i_c = \frac{\mathrm{d}(CU_0)}{\mathrm{d}t},$$

$$\text{dar } i_1 = \frac{1}{R_1} e, \quad \text{iar } e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{Deci: } -\frac{1}{R_1}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t}$$

și

$$-\Delta\Phi = -\int_0^{\Delta t} \mathrm{d}\Phi = R_1 C \int_0^{\Delta t} \mathrm{d}U_0 = R_1 C \Delta U_0 \tag{4}$$

Rezultă :

$$2\Phi = R_1 C \, \Delta U_0 \quad \text{cu} \quad \Delta U_0 = U_{0(\Delta t)} - U_{0(t=0)} \cong U_{0(\Delta t)} = U_0 \tag{5}$$

cu condiția pentru $T_1 = R_1 C$ — constanta de timp a procesului de integrare : $T_1 \ll \Delta t$. Dacă $U_{0(t=0)} = 0$ atunci $\Delta U_0 = U_{0(\Delta t)}$ și deci indicația finală a aparatului este o măsură a fluxului (inducției sau intensității cîmpului). Pe baza relației :

$$2\Phi = R_1 C U_0$$

rezultă :

$$U_0 = \frac{2\Phi}{R_1 C} = \frac{2\mu_0 N A}{R_1 C} H = \frac{1}{C_H} H \tag{6}$$

sau

$$U_0 = \frac{2\Phi}{R_1 C} = \frac{2NA}{R_1 C} B = \frac{1}{C_B} B \tag{7}$$

unde C_H și C_B sînt constantele aparatului la măsurarea mărimilor H sau B, iar U_0 valoarea tensiunii de ieșire a integratorului la sfîrșitul intervalului de timp Δt.

Tensiunea U_0 este astfel o măsură a intensității sau inducției magnetice inițiale prin bobina sondă, presupuse constante în timpul Δt. Această supoziție este acceptabilă în cazul cuvelor de electroliză, pentru care curentul este menținut constant, iar procesele de convecție ale electrolitului în diferite zone ale cuvei pot fi considerate că au loc cu variații la intervale de timp mai mari de 0,5—1 s.

Deoarece după intervalul Δt începe un proces de descărcare a condensatorului C, este necesar ca voltmetrul de la ieșirea integratorului să fie citit în regim „balistic".

Pentru îndeplinirea condiției $U_{0(t=0)} = 0$ este necesară anularea tensiunii de la ieșirea integratorului existentă la orice tip de integrator electric datorită integrării tensiunii de offset în intervalul de timp dintre două măsurări succesive. Pentru această aducere la zero a tensiunii de ieșire este utilizat întrerupătorul K manevrat manual, prin care se descarcă condensatorul C înaintea fiecărei măsurători.

De asemenea a fost prevăzută în schemă anularea offset-ului prin reglarea potențiometrului P_2, însă această operație efectuată inițial, la o temperatură diferită decît cea de lucru, conduce la existența unei tensiuni remanente de offset. Din această cauză a fost necesară plasarea întrerupătorului K pe tija suport a bobinei sondă pentru a putea fi deschis cu foarte puțin timp înainte de rotirea bobinei.

O problemă derivată din condiția $\Delta U_0 = U_{0(\Delta t)}$ o constituie măsurarea tensiunii de ieșire U_0 la finele intervalului de timp Δt. În acest scop, la ieșirea integratorului trebuie folosit un voltmetru cu memorie sau un bloc suplimentar de memorie înaintea voltmetrului (realizat cu un amplificator operațional cu foarte mare impedanță de intrare în montaj repetor, precedat de un condensator de stocare, avînd în amonte un întreruptor comandat la deschidere după trecerea intervalului de timp Δt).

2.1.3. *Bobina sondă* a fost realizată cu $N = 12.000$ spire din sîrmă subțire de CuE 0,10 mm diametru, înfășurate pe o carcasă din poliester, rezultînd o bobină cu $D_{int} = 12$ mm, $D_{ext} = 28$ mm, $H = 12$ mm.

Aria medie a unei spire ce se rotește este :

$$A = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D_{int} + D_{ext}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 = 314 \text{ mm}^2$$

Deoarece bobina sondă este rotită manual, intervalul de timp în care se face variația de flux poate fi considerat $\Delta t = 0{,}5$ s. Constanta de timp a procesului de integrare $T_1 \ll \Delta t$ și s-a ales $T_1 = 20$ ms. Pentru $T_1 = 20$ ms și $C = 2{,}2$ μF rezultă $R_1 = T/C \approx 10$ kΩ.

2.1.4. *Alimentarea* schemei electronice a integratorului se face de la o sursă dublă stabilizată (fig. 2), alimentată de la rețea, soluție constructivă mai sigură, mai ieftină și mai comodă decît alimentarea de la baterii.

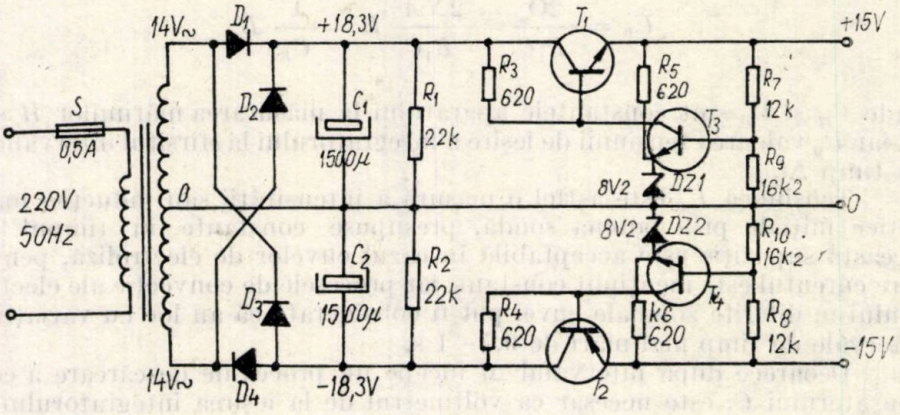


Fig. 2

Sursa este autoprotejată la scurtcircuite ale sarcinii, prin divizoarele rezistive $R_7 - R_9$ și $R_8 - R_{10}$, care, la un eventual scurtcircuit pe ieșire, reduc potențialele aplicate bazelor tranzistoarelor T_3 respectiv T_4 blocîndu-le, ceea ce produce blocarea tranzistoarelor T_1 respectiv T_2, care întrerup alimentarea scurtcircuitului.

2.1.5. *Calibrarea* teslametrului s-a efectuat în laboratorul de Măsurări electrice cu ajutorul unui solenoid avînd $N = 60$ spire, $l = 0{,}225$ m și $D_{int} = 15$ cm, parcurs de un curent continuu $I = 10$ A, în centrul căruia s-a introdus bobina sondă, determinîndu-se la anularea cîmpului, o tensiune de ieșire a integratorului avînd valoarea $U_0 = 0{,}767$ V cu o eroare de determinare de $\pm 2{,}24\,\%$.

Cu aceste date s-au determinat constantele :

$$\begin{cases} C_H \approx 3480 \left[\frac{A/m}{V}\right] \approx 43{,}7 \left[\frac{Oe}{V}\right] = \frac{H}{U_0} \\ C_B = 4{,}37 \left[\frac{mT}{V}\right] = \frac{B}{U_0} \end{cases} \tag{8}$$

din care rezultă relaţiile de utilizare ale teslamentului :

$$H = 43{,}7 \cdot U_0[\text{Oe}] \text{ sau } H = 3480 \cdot U_0[A/m]$$
$$B = 4{,}37 \cdot U_0[\text{mT}], \text{ cu } U_0 \text{ în [V]} \tag{9}$$

2.2. *Teslametru cu sondă feromagnetică cu compensarea cîmpului*
2.2.1. *Principiul de funcţionare* constă în magnetizarea mixtă a două miezuri feromagnetice identice, produsă de cîmpul magnetic extern şi de cîmpul de excitaţie de frecvenţă f. În acest mod se induc în înfăşurările miezurilor două tensiuni electromotoare, iar tensiunea diferenţială este (cu condiţia identităţii miezurilor şi înfăşurărilor) o tensiune de frecvenţă $2f$ avînd amplitudinea şi faza dependente de cîmpul extern. Semnalul astfel obţinut este amplificat, filtrat şi redresat (fig. 3) pentru ca apoi să comande un convertor tensiune- curent al cărui curent de ieşire este trecut printr-o bobină de compensare dispusă astfel încît să conţină în centrul ei miezurile feromagnetice.

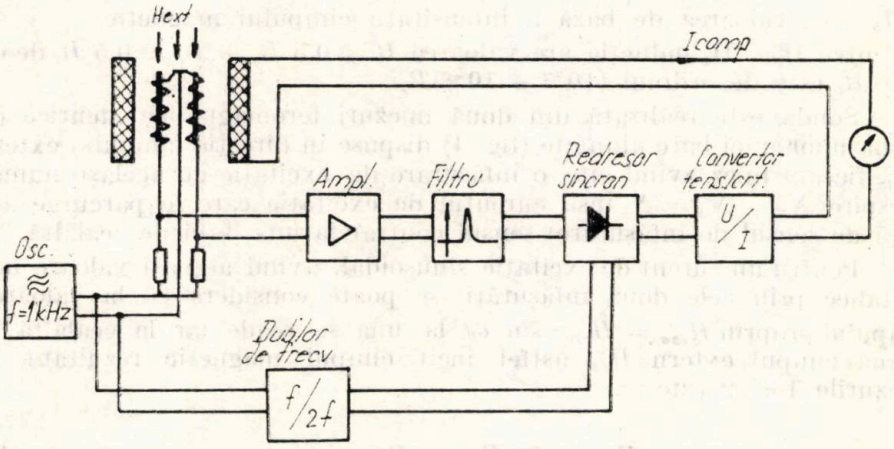


Fig. 3

Se realizează astfel o compensare a cîmpului magnetic de măsurat $H_{măs}$ prin cîmpul H_{comp} al bobinei de compensare, cîmpul magnetic rezultant extern H_{ext} fiind :

$$H_{ext} = H_{măs} - H_{comp} = 0 \tag{10}$$

Atunci :

$$H_{măs} = H_{comp} = \frac{N_c I_{comp}}{l_c} = C_H I_{comp} \tag{11}$$

curentul I_{comp} din bobina de compensare constituind o măsură a cîmpului de măsurat, constanta aparatului C_H fiind dependentă numai de parametrii constructivi ai bobinei.

2.2.2. *T.e.m. de frecvență dublă produsă la magnetizarea mixtă a sondei feromagnetice diferențiale*

O evaluare cantitativă a t.e.m. care apare în sonda feromagnetică diferențială poate fi obținută dacă se utilizează relațiile de aproximare a caracteristicii de magnetizare $B = f(H)$.

Pentru materiale feromagnetice cu ciclu de histerezis foarte îngust (permalloy și ferite), dacă se neglijează pierderile prin histerezis, curbele $B = f(H)$ devin curbe de magnetizare. O aproximare convenabilă a acestei curbe este dată în [9] prin expresia :

$$B = \frac{2}{\pi} B_s \operatorname{arc\,tg} \frac{H}{H_b} + B_l \frac{H}{H_b} \tag{12}$$

unde :

B_s este inducția de saturație către care tinde termenul neliniar al formulei ;

B_l — inducția suplimentară care exprimă creșterea practic liniară a inducției pentru cîmpuri intense :

H_b — valoarea de bază a intensității cîmpului magnetic.

Pentru $H = H_b$ inducția are valoarea $B = 0{,}5\ B_s + B_l \approx 0{,}5\ B_s$ deoarece B_l este de ordinul $(10^{-2} \div 10^{-3})B_s$.

Sonda este realizată din două miezuri feromagnetice identice de forma unor mici bare alungite (fig. 4) dispuse în direcția cîmpului extern H_{ext}, fiecare miez avînd cîte o înfășurare de excitație cu același număr de spire $N_1 = N_2 = N$ însă curentul de excitație care le parcurge are (față de sensul de înfășurare) sensul contrar la una, față de cealaltă.

Pentru un curent de excitație sinusoidal, avînd aceeași valoare instantanee prin cele două înfășurări, se poate considera că la valoarea cîmpului propriu $H_{exc} = \hat{H}_{exc} \cdot \sin \omega t$ la una se scade iar la cealaltă se adună cîmpul extern H_{ext} astfel încît cîmpul magnetic rezultant în miezurile 1 și 2 este :

$$H_{1,2} = \mp H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t \tag{13}$$

Inducțiile magnetice produse în fiecare miez și exprimate prin relația (12) sînt :

$$B_1 = \frac{2}{\pi} B_s \operatorname{arc\,tg} \frac{-H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} + B_l \frac{-H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \tag{14}$$

și

$$B_2 = \frac{2}{\pi} B_s \operatorname{arc\,tg} \frac{+H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} + B_l \frac{+H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \tag{15}$$

iar derivatele lor în raport cu timpul,care intervin în t.e.m. induse în înfășurări, au expresiile :

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{2}{\pi} B_s \frac{\frac{\hat{H}_{exc}}{H_b} \omega \cos \omega t}{1 + \left(\frac{-H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \right)^2} + B_l \frac{\hat{H}_{exc}}{H_b} \omega \cos \omega t \qquad (16)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = \frac{2}{\pi} B_s \frac{\frac{\hat{H}_{exc}}{H_b} \omega \cos \omega t}{1 + \left(\frac{+H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \right)^2} + B_l \frac{\hat{H}_{exc}}{H_b} \omega \cos \omega t \qquad (17)$$

Tensiunile la bornele bobinelor u_1 și u_2, sînt practic egale cu t.e.m. nduse e_1 și e_2 (dacă înfășurările se realizează cu rezistențe foarte nici) adică :

$$u_1 \approx e_1 = - NA \frac{dB_1}{dt}$$

și

$$u_2 \approx e_2 = - NA \frac{dB_2}{dt}$$

unde s-a ținut seama că numerele de spire și ariile secțiunilor ransversale ale miezurilor sînt aceleași. Semnalul furnizat de sondă ste tensiunea diferențială u :

$$u = u_2 - u_1 = e_2 - e_1 = NA \left(\frac{dB_1}{dt} - \frac{dB_2}{dt} \right) \qquad (18)$$

Prin înlocuirea termenilor dați de relațiile (14) și (15) obținem după implificări :

$$u = \frac{4}{\pi} B_s \omega NA \frac{H_{ext} \hat{H}_{exc}}{H_b^3} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin 2 \omega t}{\left[\left(1 + \left(\frac{-H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{+H_{ext} + \hat{H}_{exc} \sin \omega t}{H_b} \right)^2 \right]} \qquad (19)$$

Tensiunea diferențială u este de frecvență dublă față de frecvența urentului de excitație dar este nesinusoidală, influența termenilor varia- bili de la numitor manifestîndu-se prin deformarea sinusoidei care capătă spectul unor vîrfuri în momentele în care $\sin 2\omega t = \pm 1$. Valoarea

maximă $\hat{U}$ a tensiunii diferențiale apare atunci cînd $\sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și ar valoarea :

$$\hat{U} = \frac{4}{\pi} B_s \omega N A \frac{\frac{H_{ext}\hat{H}_{exc}}{H_b^3}}{\left[1 + \left(\frac{-H_{ext} + \frac{\sqrt{2}}{2}H_{exc}}{H_b}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{+H_{ext} + \frac{\sqrt{2}}{2}H_{exc}}{H_b}\right)^2\right.} \quad (20$$

Se remarcă dependența liniară de cîmpul H_{ext} dacă valoarea aces tuia este mică și contribuția sa în termenii de la numitor este neglijabilă

Pentru o sondă de detecție avînd $N_d = 100$ spire, aria $A = 1{,}8$ mm² $B_s = 0{,}8$ T, un curent de excitație de frecvență $f = 1$ kHz și cu notațiile

$$\hat{H}_{exc} = m H_b \sqrt{2}\,; \quad H_{ext} = K \hat{H}_{exc} \frac{\sqrt{2}}{2} = Km\ H_b \quad (21$$

relația (20) se simplifică devenind în cazul $m = \sqrt{2}$ (pentru care $\hat{H}_{exc} = 2 H_b$ iar miezurile ajung la saturație) :

$$\hat{U} = 6{,}8 \frac{K}{[1 + 2(-K + 1)^2][1 + 2(K + 1)^2]} \quad (22$$

Dînd lui K valori în intervalul (0,01 ÷ 20) se obțin pentru semnalu detectat $\hat{U}$ valorile :

K	0,01	0,1	1	5	10	20
$\hat{U}$[mV]	7,5	75	755	14	1,84	0,21

2.2.3. *Bobina de compensare.* Pentru compensarea cîmpului de mă surat de valoare maximă $H_{măs.max} = 16$ kA/m este folosită o bobină cu $N_{comp} = 200$ spire din conductor CuE 0,8 mm și lungimea axială $l =$ $= 18$ mm pentru care, conform relației (11) rezultă curentul $I_{comp} =$ $= 1{,}44$ A.

Bobina este realizată pe o carcasă dreptunghiulară din poliester iar în interiorul carcasei este plasată sonda feromagnetică. Rezistența bo binei de compensare este $R_{b\,comp} = 0{,}63$ ohmi așa încît tensiunea pe bo bină rezultă $U_{comp} = R_{b\,comp} I_{comp} = 0{,}9$ V.

2.2.4. *Bobinele sondă* sînt de tip Förster, fiecare din cele două bo bine avînd un miez de permalloy și cîte o înfășurare de excitație și una d detecție conectate convenabil (fig. 3). Fiecare din cele două bobine d excitație s-a realizat cu $N = 300$ spire din conductor CuE 0,15 mm în fășurate pe cîte un miez din permalloy cu lungimea $l = 12$ mm, lățime

b=3 mm și grosimea $d = 2 \times 0{,}3$ mm (2 tole de 0,3) deci cu aria secțiunii transversale $A = 3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$ mm², rezistența unei bobine de excitație fiind $R_{b\,exc} = 2{,}8$ ohmi.

Curentul de excitație, pentru care miezul feromagnetic se saturează, s-a stabilit experimental ca fiind $I_{exc} = 60$ mA (valoare efectivă) pentru care rezultă cîmpul magnetic de excitație necesar:

$$\hat{H}_{exc} = \frac{N\,\hat{I}_{exc}}{l} = \frac{300 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2}}{12 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \cdot \sqrt{2}\ \text{kA/m}$$

Valoarea cîmpului extern este conform relației (21):

$$H_{ext} = K \cdot \hat{H}_{exc} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = K \cdot 1{,}5\ \text{kA/m} \qquad (24)$$

unde K poate avea valorile $K \in [0{,}01\,;\,20]$ pentru a rezulta un semnal $\hat{U}$ (22) detectabil, adică:

K		0,01	0,1	1	5	10	20
H_{ext}	/kA/m/	0,015	0,15	1,5	7,5	15	30
$\hat{U}$	*Hmv*	7,5	75	755	14	1,84	0,21

În situația inițială, cînd $H_{comp} = 0$ și $H_{\substack{ext \\ max}} = H_{\substack{măs \\ max}} = 16$ kA/m apare un semnal $\hat{U} = 1{,}3$ mV care va produce la ieșire un curent de compensare I_{comp} și un cîmp H_{comp} care va reduce H_{ext}. Deci K scade la început mai rapid și apoi mai lent pînă se stabilește $H_{ext} \approx 0$, pentru $K \leqslant 0{,}01$ cînd $H_{comp} \approx H_{măs}$ (cu o diferență sub 1 %). Semnalul obținut atunci, $\hat{U} \leqslant 7{,}5$ mV este amplificat și prelucrat producînd la ieșire curentul de compensare necesar.

Pentru sesizarea semnalului $\hat{U}$ sînt prevăzute bobinele de detecție, situate pe miezurile feromagnetice sub înfășurările de excitație, fiecare avînd $N_d = 100$ spire.

2.2.5. *Oscilatorul sinusoidal* are frecvența de lucru $f = 1$ kHz și este realizat cu un AO β741 cu două bucle de reacție, cu punte Wien, prevăzut la ieșire cu un etaj amplificator în contratimp realizat cu două tranzistoare complementare, pentru obținerea unui curent de intensitate suficient de mare (60 mA) necesar excitației bobinelor sondă. Pentru reglarea curentului de excitație este prevăzut un potențiometru ($P_4 = 100$ ohmi).

2.2.6. *Filtrul activ trece bandă* are frecvența centrală $f = 2$ kHz, amplificarea $H_0 = 100$, banda de trecere $B = 266$ Hz și un factor de calitate $Q = 7{,}5$. Filtrul activ este realizat cu un AO β741 și o rețea de tip RC conectată la intrarea inversoare, alimentarea fiind cu ± 5 V.

2.2.7. *Redresorul sensibil la fază.* Semnalul furnizat de sonda feromagnetică și exprimat prin relațiile (19), (20) schimbă polaritatea

odată cu $H_{ext}(H_{măs})$ fiind în fază sau în antifază cu un semnal de referință obținut prin dublarea frecvenței generatorului sinusoidal cu ajutorul dublorului de frecvență. Redresorul sincron este realizat cu două tranzistoare complementare cu germaniu, comandate de semnalul dat de dublorul de frecvență și efectuează redresarea monoalternanță a semnalului util. La ieșirea redresorului se obține un semnal pulsatoriu de polaritate și amplitudine dependente de sensul și valoarea cîmpului extern H_{ext}.

2.2.8. *Dublorul de frecvență* este realizat cu o punte redresoare urmată de un circuit format dintr-un condensator și inductivitatea înfășurării primare a unui transformator cu miez de ferită, cu două secundare identice conectate convenabil la redresorul sincron.

2.2.9. *Etajul preamplificator* urmează redresorului sincron și conține un AO β741 în montaj inversor, care realizează o amplificare de 100 ori a semnalului de la ieșirea redresorului sincron pentru a-l aplica apoi convertorului tensiune-curent (amplificatorul de putere).

2.2.10. *Amplificatorul de putere* este blocul final al schemei teslametrului care convertește tensiunea de la ieșirea redresorului sincron într-un curent ce trece prin bobina de compensație astfel încît cîmpul creat H_{comp} să ducă la compensarea cîmpului de măsurat $H_{măs}$ reducînd cîmpul rezultant $H_{ext} = H_{măs} - H_{comp}$ pînă la o valoare mai mică decît aproximativ 1% din $H_{măs}$ ($K \leqslant 0{,}01$).

Schema amplificatorului conține un etaj în contratimp realizat cu două tranzistoare complementare de putere de tip BC 235 respectiv BC 236 care au curentul de colector $I_c = 2\text{A} > I_{comp\,max} = 1{,}44\text{A}$ stabilit anterior (pct. 2.2.3).

2.2.11. *Sursa de alimentare* este o sursă dublă stabilizată de $\pm$ 5 V realizată prin conectarea etajată a două surse independente.

2.2.12. *Calibrarea teslametrului* cu compensare nu a fost încă executată pentru domeniul 200 Oe (16kA/m) pentru care a fost realizat teslametrul, necesitînd realizarea unui solenoid etalon pentru cîmpuri intense care urmează a fi construit.

Dat fiind însă principiul de funcționare al teslametrului, bazat pe compensarea cîmpului magnetic, se poate conta pe constanta bobinei de compensare care produce cîmpul:

$$H_{comp} = \frac{N_{comp} I_{comp}}{l_{comp}} = \frac{200 \cdot I_{comp}}{0{,}018\ \text{m}} = 11{,}11 \cdot I_{comp\,(\text{A})} \left(\frac{kA}{m} \right)$$

practic egal cu cîmpul măsurat $H_{măs}$ (cu o eroare $\varepsilon \leqslant 1\%$).

3. Rezultate experimentale

Măsurările componentelor H_x, H_y, H_z ale cîmpului magnetic au fost efectuate la I. A. Slatina la două cuve de electroliză a aluminiului (cuva nr. 633 in hala 7 cu $I = 87$ kA și cuva nr. 41 din hala 4 cu $I = 65$ kA) cu teslametrul cu bobină în puncte situate la periferia cuvelor, în

dreptul și între polii anodici, la două cote : $h = 5$ cm și $h = 20$ cm deasupra nivelului cuvei.

Rezultatele măsurătorilor executate la cuva de $I = 87$ kA sînt date în fig. 5, 6, 7, iar la cuva de $I = 65$ kA în fig. 8, 9, 10.

Eroarea maximă totală, cuprinzînd : eroarea instrumentală (2,2 %), eroarea de citire a indicațiilor (4,7 %) și eroarea de orientare a bobinei sondă (7,5 %), analizate în [1] și considerate erori aleatoare, este $\varepsilon_t \approx 9{,}12$ %.

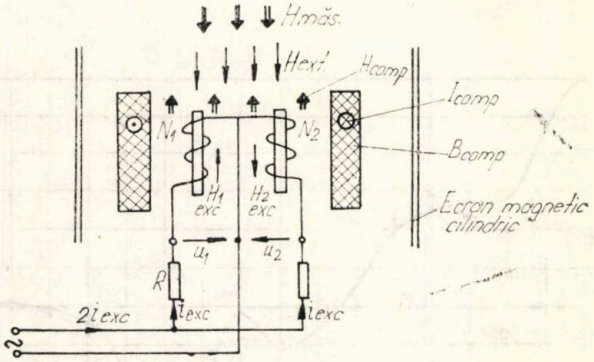


Fig. 4

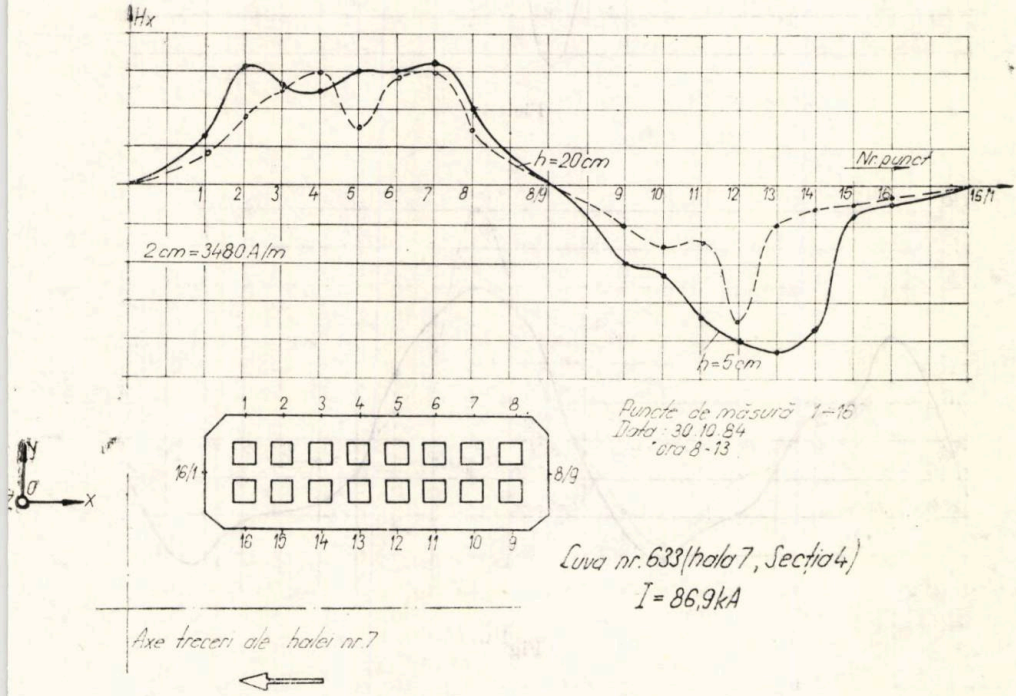


Fig. 5

O primă verificare a rezultatelor obținute s-a făcut prin compararea acestora cu valorile date în [3] referitoare la cuva de 130 kA de la Volvograd și de la Novokuznețk. Deși numai orientativă, (cuvele de la I.A. Slatina avînd $I = 87$ kA și $I = 65$ kA) compararea confirmă alura curbelor precum și cerințele teoretice privind punctele de anulare, de creștere și descreștere ale cîmpului.

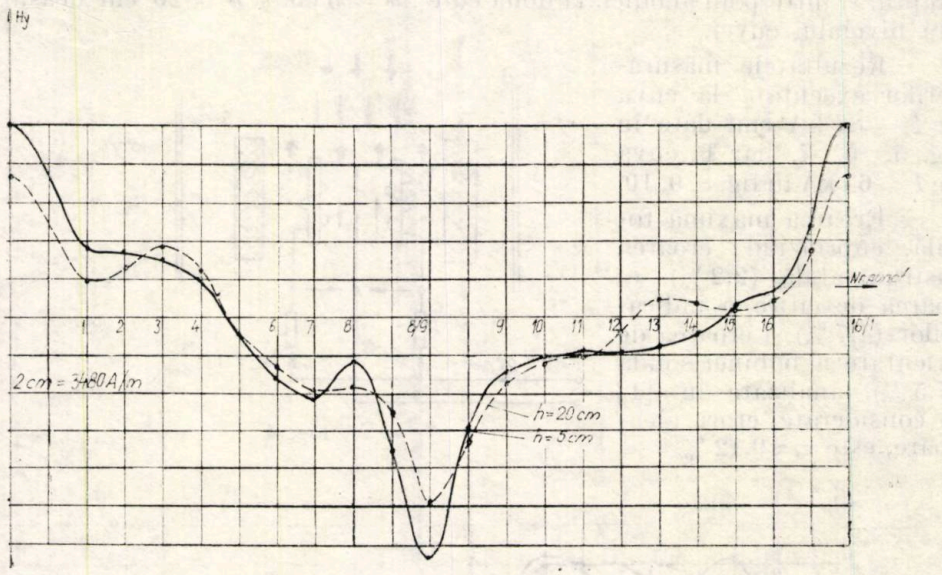


Fig. 6

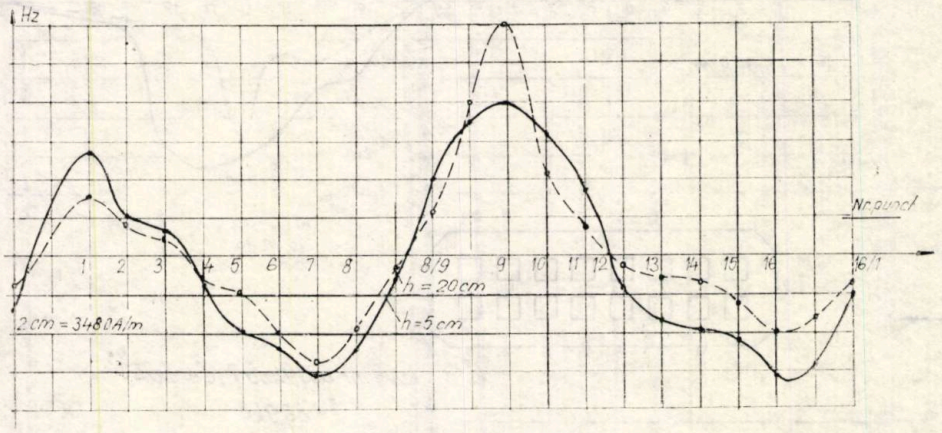


Fig. 7

Astfel în lucrarea [3] se menționează cerințele teoretice :

— componenta H_x să se anuleze în punctele extreme situate pe axa longitudinală a cuvei.

— componenta H_y să se anuleze în punctele mijlocii ale laturii mari și să atingă valori extreme în punctele extreme de pe axa longitudinală.

— componenta H_z să aibe valori crescătoare (în sensuri contrare) la ieșirea curentului din electrolizor (aceleași puncte extreme de pe axa longitudinală).

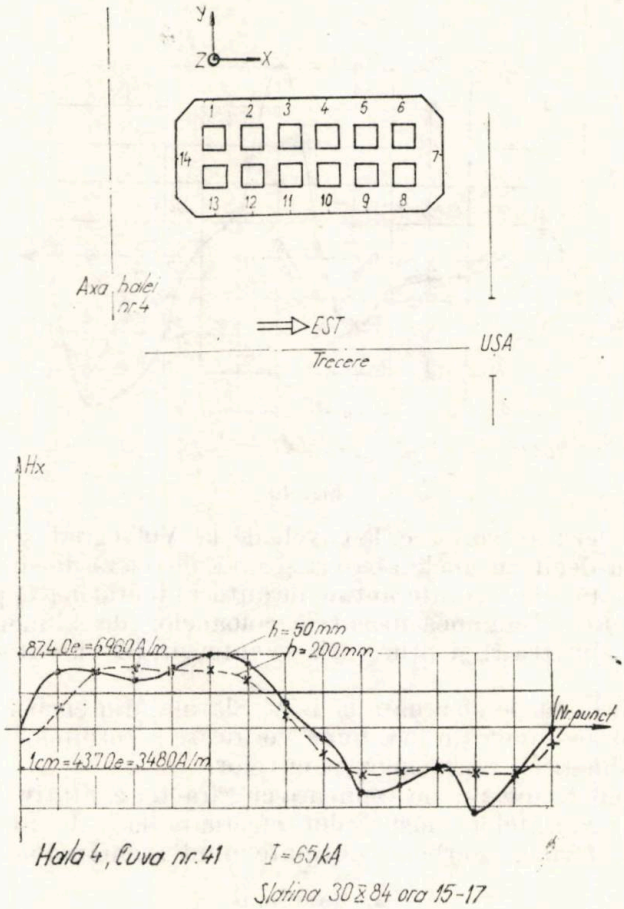

Y
Z
X
1 2 3 4 5 6
14
7
13 12 11 10 9 8
Axa halei nr.4
EST
USA
Trecere
Hx
h=50mm
h=200mm
87,4 Oe=6960 A/m
Nr punct
1cm=43,7 Oe=3480 A/m
Hala 4, Cuva nr.41
I=65kA
Slatina 30 X 84 ora 15-17

Fig. 8

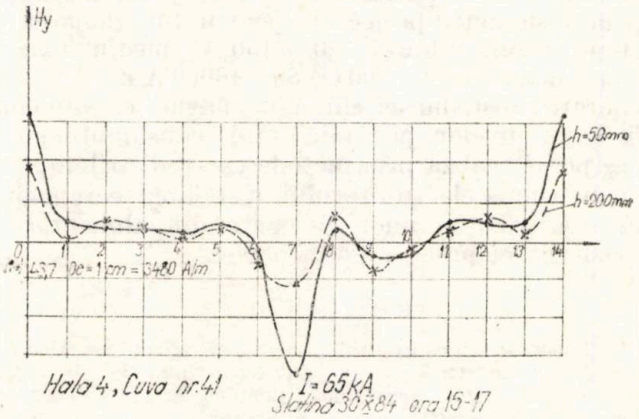

Hy
h=50mm
h=200mm
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
43,7 Oe=1cm=3480 A/m
Hala 4, Cuva nr.41
I=65kA
Slatina 30 X 84 ora 15-17

Fig. 9

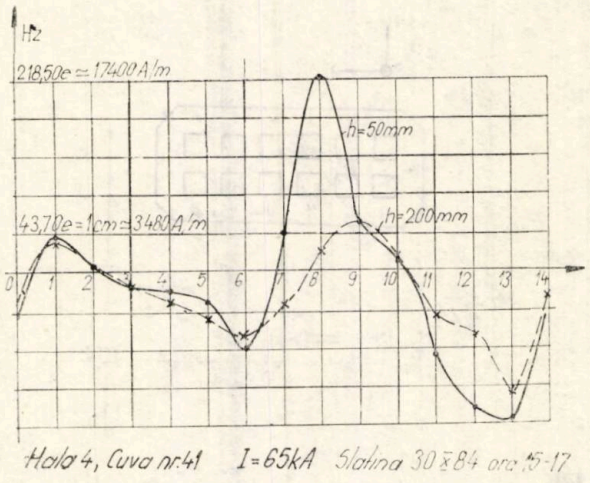


Fig. 10

Aceste cerințe teoretice, la cuvele de la Volvograd și Novokuzneţk, nu se verifică decît cu unele abateri și față de o axă de simetrie longitudinală deplasată, abateri intepretate de autorul lucrării [3] prin influența cuvelor alăturate, lungimea inegală a coloanelor de alimentare (deci o funcționare asimetrică) și prin variația intensității curentului în timpul măsurărilor.

La determinările efectuate la I. A. Slatina, din curbele reprezentate în fig. 5 : 10 se observă o mai bună verificare a cerințelor menționate și deci o mai simetrică funcționare a cuvelor.

O a doua verificare, de asemenea cu caracter calitativ a constituit-o compararea rezultatelor măsurărilor efectuate la I.A. Slatina la două date diferite, formele curbelor obținute fiind asemănătoare.

4. Concluzii

1. Determinarea repartiției spațiale a cîmpului magnetic la cuvele electrolizoarelor de mare capacitate de la I. A. Slatina a impus realizarea a două tipuri de teslametre proiectate pentru funcționarea în condiții relativ severe : temperatura ridicată 120°—150° C, mediu toxic și intensități mari ale cîmpului magnetic, 1—200 Oe 80—16000 A/m.

2. Ameliorarea distribuției cîmpului magnetic, care conduce în final la mărirea eficienței cuvelor, prin micșorarea consumului specific de energie electrică, se poate realiza prin metode ca : redistribuirea maselor feromagnetice în construcția electrolizorului, instalarea ecranelor electromagnetice, modificarea poziției unor elemente din alimentarea cu curent, modificarea poziției reciproce a electrozilor.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Golovanov, P. Manolescu*, Cercetări asupra fenomenelor electromagnetice și hidrodinamice în instalațiile industriale pentru producerea aluminiului în vederea creștrrii performanțelor lor tehnico-economice. Contract nr. 13—3—2/1983/A/1984. Beneficiar : IAMN București pentru I. A. Slatina.

2. *J. W. Evans, Y. Zundelerich*, Metallurgical Transactions B, vol. 12 B, June, 1981

3. *E. A. Meerovici*, Cimpul magnetic și forțele electrodinamice în zona de topire a electrolizoarelor de aluminiu de mare capacitate, Moscova, E. A. 1962.
4. *U. Wiener*, Măsurări electrice industriale. Vol. II.Măsurarea mărimilor magnetice. București, E. T. 1969.
5. *J. Primdahl*, I. E. E. E. Transaction on Magnetics, nr. 2, 1970
6. *J. P. Gordon, H. Brown*, I. E. E. E. Transactions on Magnetics, nr. 1, 1972
7. *A. Timotin, C. Fluerașu*, Bul. I. P. București, 1981.
8. *Dr. Förster*, Zeitschrift für Metallkunde, nr. 40, Stuttgart 1955.
9. *A.D. Drozdov*, Circuite electrice cu miezuri feromagnetice în protecția prin relee, Moscova 1965.

Two Types of Fluxmeters for the Determination of the Spatial Distribution of the Magnetic Field at the Electrolyzers of the Aluminium Plant of Slatina

The spatial repartition of the intensity of the electric current and of the associated magnetic field, as well as the variations in time of these parameters, determine more than other factors, the form of the melted metal mirror, on which the efficiency of the electrolytic tanks depends.
This article presents the devices and the results obtained in the measuring — for the first time achieved in our country — of the spatial distribution of the magnetic field of great intensity at the electrolytic tanks of Slatina aluminium plant.

C.Z.: 537. 22

INFLUENȚA SARCINII SPAȚIALE ASUPRA STRĂPUNGERII DIELECTRICILOR SOLIZI

P. NOȚINGHER, A. IFRIM*

Lucrarea prezintă modul de repartiție a cîmpului electric și a sarcinii spațiale în cazul dielectricilor omogeni și izotropi și al sistemelor de electrozi ac-plan. Se analizează rolul sarcinii spațiale asupra inițierii unui canal de străpungere în cazul cîmpurilor electrice alternative.

1. Introducere

Teoriile generale ale străpungerii dielectricilor solizi (intrinseci, prin avalanșă, termice) explică mecanismul, de străpungere prin apariția unor instabilități electronice și/sau catastrofe termice în rețelele acestora. Ele se aplică, în general, în cazul dielectricilor omogeni și izotropi aflați în cîmpuri electrice uniforme și constante în timp, duratele de străpungere determinate nedepășind 10^{-5}s [1] ... [5].

În ultimele trei decenii s-au efectuat o serie de cercetări privind străpungerea dielectricilor neomogeni și anizotropi aflați în cîmpuri electrice neuniforme și variabile în timp. În cadrul acestora s-a analizat dependența rigidității dielectrice și a duratei de străpungere de structura defectelor de rețea [6], de caracteristicile descărcărilor electrice interne [7], [8], [9] și superficiale [10], [11], de durata [9], frecvența [12], [13] și forma undei de tensiune aplicate [14], de natura [15] și forma electrozilor [16] etc. și s-a pus în evidență și s-a analizat fenomenul de arborescență ca fază premergătoare străpungerii dielectricilor [17].

Arborescențele sînt constituite din rețele de canale slab conductoare și se dezvoltă dintr-un canal inițial apărut în vecinătatea unor defecte ale electrozilor (muchii ascuțite, protuberanțe — fig. 1) sau defecte ale dielectricilor (situate la suprafață — fig. 2 — sau în interiorul lor — fig. 3). Odată inițiată, arborescența se dezvoltă — dinspre zonele cu cîmp intens spre cele cu cîmp mai slab — pe întreaga grosime a dielectricului (fig. 4), determinînd apariția unei străpungeri termice, respectiv formarea unui canal conductor de secțiune foarte mare (fig. 5).

Duratele relative mari (față de cele determinate în cadrul teoriilor generale) de inițiere a primului canal și de dezvoltare a arborescențelor, precum și dezvoltarea discontinuă a canalelor au condus la elaborarea unor modele (macroscopice) de străpungere a dielectricilor neomogeni (Bolton [12], Goffaux [18], Noțingher [19] etc.).

---

* Șef lucrări dr. ing.; Prof., dr. ing., catedra Mașini electrice

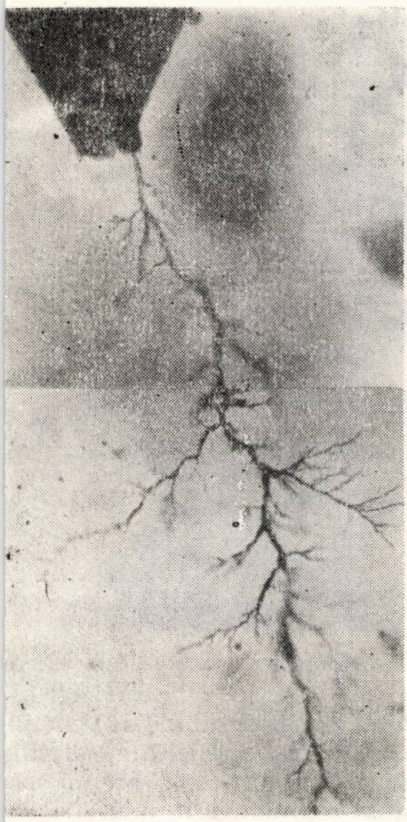


Fig. 1. Arborescență inițiată pe un defect de electrod.

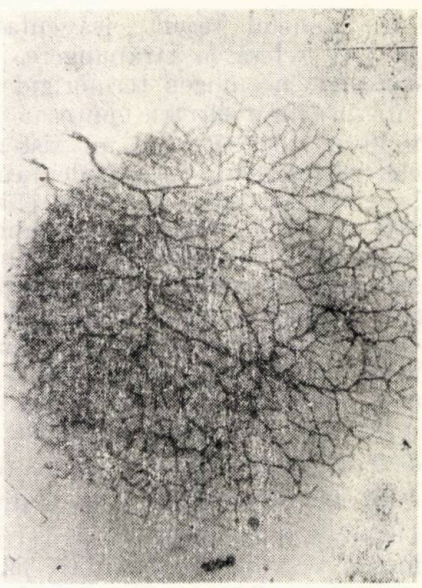


Fig. 2. Arborescență inițiată pe un defect de suprafață.

Fig. 3. Arborescență inițiată într-o cavitate internă.

Fig. 4. Arborescență dezvoltată pe întreaga grosime a dielectricului (înainte de străpungerea acestuia).

Modelul termic prezentat în [19] se referă la străpungerea unui dielectric neomogen termorigid aflat într-un cîmp electric puternic neuniform — produs de un sistem de electrozi ac-plan. Se consideră că dielectricul prezintă o cavitate parabolică situată în vecinătatea acului, iar inițierea și dezvoltarea canalului de străpungere se explică prin fracturarea termică a moleculelor dielectricului ca urmare a creșterii temperaturii peste valoarea critică T_c. Se demonstrează că factorul primordial în inițierea canalului îl constituie densitatea superficială de putere transmisă de descărcările parțiale din cavitatea pereților acesteia și că, odată inițiat, canalul se dezvoltă pînă la străpungerea completă a dielectricului.

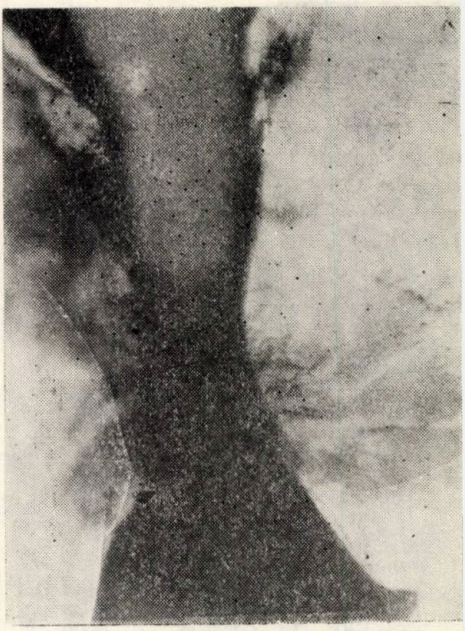


Fig. 5. Canalul format în urma străoungerii

În absența cavităților și impurităților conductoare, inițierea unui canal de străpungere se datorează, în principal, acțiunii simple sau combinate a sarcinii injectate de electrozi și a solicitărilor mecanice ale cîmpului electric. În cele ce urmează se prezintă modul de repartiție a sarcinii spațiale (injectate) și influența acesteia asupra străpungerii dielectricilor omogeni, în cazul unor cîmpuri electrice armonice puternic neuniforme (produse de electrozi ac-plan).

2. Calculul cîmpului electric $\bar{E}$ și al densității de sarcină ρ_v

Concentrația purtătorilor de sarcină, n, respectiv densitatea curentului injectat $\bar{J}$, depinde de intensitatea cîmpului electric stabilit în vecinătatea electrodului injectant, de mărimea lucrului mecanic de extracție a electronilor din metal φ, de temperatura T și afinitatea pentru electron a dielectricului φ_A, respectiv de înălțimea barierei de potențial corespunzătoare contactului metal-dielectric $\Phi' = \varphi - \varphi_A$ etc.

În cazul unui dielectric ideal, Coelho [20] a obținut expresii relativ simple ale lungimii de difuzie a electronilor injectați λ_0

$$\lambda_0 = \left[\frac{2\varepsilon kT}{n(0)\cdot q_0^2}\right]^{1/2} \tag{1}$$

și a intensității cîmpului electric în vecinătatea catodului E_c

$$E_c = \frac{2kT}{q_0\lambda_0}, \tag{2}$$

unde $n(0) = 2{,}5 \cdot 10^{25} \cdot \exp(-\Phi/kT)$ reprezintă concentrația electronilor injectați de catod (la suprafața sa) în absența cîmpului electric, ε — permitivitatea dielectricului, q_0 — sarcina electronului și k — constanta lui Boltzmann.

Modificarea barierei de potențial Φ determină variații importante ale mărimilor n, J și λ_0. Astfel, reducerea lui Φ de la 0,2 eV la 0,1 eV determină o creștere a lui $n(0)$ de la $8{,}4 \cdot 10^{21}$ m^{-3} la $4{,}58 \cdot 10^{23}$ m^{-3} (respectiv, o creștere a lui J de la 0,42 A/m^2 la 3,16 A/m^2) și o reducere a lui λ_0 de la 31,5 nm la 4,25 nm.

Înălțimea barierei de potențial Φ depinde atît de natura electrozilor și dielectricului, cît și de intensitatea cîmpului electric stabilit în dielectric. Dacă pentru φ_A se acceptă — în cazul polimerilor uzuali — valori cuprinse între 3 și 4 eV [21], apoi în privința valorilor lui φ, există mari neconcordanțe datorate, mai ales, metodelor diferite de determinare a acestora). În cele ce urmează s-au utilizat valorile prezentate de Tanaka și Greenwood în [15]: 4,8 eV pentru Fe, 4 eV pentru Cu, 4,3 eV pentru Ag și 5,3 eV pentru Pt.

La stabilirea unui cîmp electric, E, bariera de potențial se micșorează. Astfel, pentru $E > 10$ MV/m, Φ se reduce cu $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi = q_0 \sqrt{\frac{q_0 E}{4\pi\varepsilon}}, \tag{3}$$

densitatea de volum a sarcinii injectate ρ_{v0} (prin efect Schottky) calculîndu-se cu relația:

$$\rho_{v0} = \frac{AT^2}{ME} \exp\left(-\frac{\Phi - \Delta\Phi}{kT}\right), \tag{4}$$

unde M reprezintă mobilitatea purtătorilor, iar $A = 1{,}2 \cdot 10^6$ Am^{-2}K^{-2} — o constantă de material.

Dacă $E > 100$ MV/m se produce și o emisie de sarcină prin efect tunel, ρ_{v0} calculîndu-se (conform legii Fowler-Nordheim) cu relația:

$$\rho_{v0} = \frac{q_0^3 E}{8\pi h M \Phi} \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{C\Phi^{3/2}}{q_0 E}\right), \tag{5}$$

unde $C = \sqrt{8\pi^2 m_0/h^2}$, m_0 reprezintă masa electronului, iar h — constanta lui Planck.

2.1. Formularea problemei

Se consideră domeniul D(fig. 5) cu simetrie axială, mărginit de hiperboloidul de rotație S_1 (corespunzător electrodului injectant-ac) și planul S_2 (corespunzător electrodului plan) și extins pînă la un elipsoid S_3, suficient de îndepărtat, astfel încît:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_M = 0, \quad M \in S_3. \tag{6}$$

Pentru calculul mărimilor $\bar{E}$ și ρ_v se adoptă următorul model fizic :

a) Mediul este liniar, omogen și izotrop

$$\bar{D}(P) = \varepsilon \cdot \bar{E}(P), \quad P \in \mathscr{D} \tag{7}$$

$$\bar{J}(P) = M \cdot \rho_v(P) \cdot \bar{E}(P) - D_f \cdot \operatorname{grad} \rho_v(P), \quad P \in \mathscr{D} \tag{8}$$

b) Regimul cîmpului electric este cel electrocinetic staționar

$$\bar{E}(P) = -\operatorname{grad} V(P), \quad P \in \mathscr{D} \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \bar{D}(P) = \rho_v(P), \quad P \in \mathscr{D} \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \bar{J}(P) = 0, \quad P \in \mathscr{D} \tag{11}$$

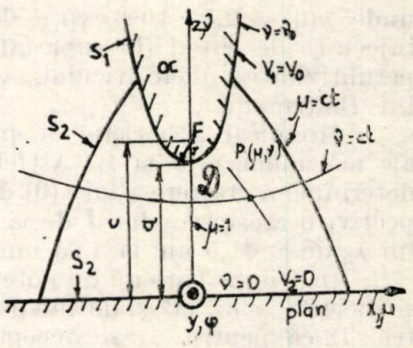


Fig. 6. Domeniul $\mathscr{D}$ în care se calculează $\bar{E}$, ρ_v și $\bar{f}_v$.

c) Condițiile pe frontiere corespund relațiilor :

$$\begin{aligned} &V(M) = V_0, && M \in S_1 \\ &V(M) = 0, && M \in S_2 \\ &\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_M = 0 && M \in S_3 \\ &\rho_v(M) = \rho_{v0}(M), && M \in S_1 \end{aligned} \tag{12}$$

Între mobilitatea M și coeficientul de difuzie a purtătorilor de sarcină D_f există relația [22] :

$$\frac{D_f}{M} = \frac{kT}{q_0}. \tag{13}$$

Pentru calculul densității de volum a forței ($\bar{f}_v$) corespunzătoare cîmpului electric se utilizează relația :

$$\bar{f}_v(P) = \rho_v(P) \cdot \bar{E}(P), \quad P \in \mathscr{D}. \tag{14}$$

Considerînd că ε, M și D_f sînt constante în $\mathscr{D}$ și neglijînd termenul corespunzător difuziei ($D_f/M = 0{,}025$ eV), din (7) — (11) se obține [23] :

$$(\Delta V)^2 + \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \Delta V = 0, \tag{15}$$

relație valabilă pentru semne identice ale potențialului și sarcinii.

Ecuația (15) a fost rezolvată analitic pentru diferite cazuri particulare (configurații simple ale electrozilor, cîmpuri constante, ρ_v constant de-a lungul liniilor de cîmp etc.), o analiză a ipotezelor introduse și a rezultatelor obținute fiind prezentată în [23]. O metodă de rezolvare bazată pe aproximații succesive, în cazul unor electrozi ac-plan, este prezentată de Atten în [24]; el presupune însă că sarcina injectată ρ_{v0} este independentă de $\bar{E}$.

În lucrarea de față se calculează E și ρ_{v0} într-un caz general. În acest sens, ρ_{v0} se determină cu relațiile (4) — (5), iar ecuația (15) se înlocuiește cu sistemul neliniar echivalent

$$\begin{aligned} &\Delta V(P) = -\rho_v(P)/\varepsilon, && P \in \mathcal{D} \\ &\text{grad } V(P) \cdot \text{grad } 1/\rho_v(P) = -1/\varepsilon, && P \in \mathcal{D} \end{aligned} \tag{16}$$

și condițiile (12).

Prin urmare, determinarea funcțiilor $V(P)$ și $\rho_v(P)$ implică rezolvarea a două probleme parțiale (distincte):

a) O problemă Poisson

$$\begin{aligned} &\Delta V(P) = -\rho_v(P)/\varepsilon, && P \in \mathcal{D} \\ &V(M) = V_1, && M \in S_1 \\ &V(M) = 0, && M \in S_2 \\ &\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_M = 0, && M \in S_3 \end{aligned} \tag{17}$$

b) O problemă liniară (rezolvarea unei ecuații de ordinul I)

$$\begin{aligned} &\text{grad } V(P) \cdot \text{grad } 1/\rho_v(P) = -1/\varepsilon, && P \in \mathcal{D} \\ &\rho_v(M) = \rho_{v0}(M), && M \in S_1. \end{aligned} \tag{18}$$

2.2. Metodă de calcul

Considerînd (pentru simplificarea calculelor) $\rho_v(P) > 0$, rezolvarea sistemului (17)—(18) se face prin metoda aproximărilor succesive. Se consideră $\rho_v^0(P) = 0$, $P \in \mathcal{D}$ și se determină — cu (17) — $V^1(P)$, $P \in \mathcal{D}$, apoi, cu $V^1(P)$ cunoscut, se determină — cu (18) — $\rho_v^1(P)$, apoi $V^2(P)$ și $\rho_v^2(P)$ ș. a. m. d., calculele se continuă pînă la aflarea soluției ($V^n(P)$, $\rho_v^n(P)$), $P \in \mathcal{D}$, pentru care $\varepsilon_n = \max(\varepsilon_{nV}, \varepsilon_{n\rho})$, cu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nV} &= \frac{\|[V]^n - [V]^{n-1}\|}{\|[V]^n\|} \\ \varepsilon_{n\rho} &= \frac{\|[\rho_V]^n - [\rho_V]^{n-1}\|}{\|[\rho_V]^n\|}, \end{aligned} \tag{19}$$

este inferioară unei valori limită date ($[X]^n$ reprezentînd matricea potențialului, respectiv a sarcinii, într-o rețea de puncte $P \in D$, după iterația n, iar $\|[X]\| = \max |X(P)|$, $P \in \mathcal{D}$).

Pentru scrierea ecuațiilor (17)—(18) se utilizează sistemul de coordonate al elipsoiului de rotație alungit (μ, ν, ρ) [25], în care frontierele lui $\mathcal{D}$ reprezintă suprafețe de coordonate (fig. 6). Cum $\mathcal{D}$ prezintă simetrie axială, mărimile V, $\bar{E}$ și ρ_v depind doar de coordonatele μ și ν; din acest

motiv calculele se efectuează doar într-un domeniu din planul $(\mu, \nu, 0)$ determinat de suprafețele $\mu = 1$, $\nu = \nu_0$, $\mu = \mu_3$ (corespunzătoare lui S_3) și $\nu = 0$ (fig. 7).

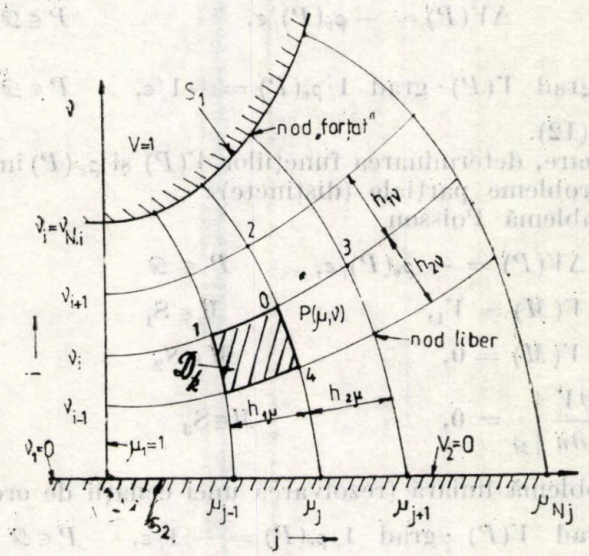


Fig. 7. Discretizarea domeniului D.

Pentru efectuarea calculelor numerice s-a utilizat metoda diferențelor finite (prezentată în [23]). În acest sens, s-a împărțit domeniul $\mathcal{D}$ în n_D subdomenii $\mathcal{D}_k$ — cu ajutorul suprafețelor $\nu = \nu_i$ și $\mu = \mu_j$, $i = 1, 2 \ldots N_i$ și $j = 1, 2 \ldots N_j$, obținînd-se o rețea cu n_N noduri în care s-au determinat, apoi, valorile V_p și ρ_{vp}, $p = 1, 2 \ldots n$ (fig. 7). Discretizarea — prin diferențe finite — a operatorilor $\partial/\partial\mu$, $\partial/\partial\nu$, $\partial^2/\partial\mu^2$ și $\partial^2/\partial\nu^2$ care intervin în (17) și (18) conduce la obținerea a două sisteme de ecuații algebrice liniare;

$$A^1_{i-1,j} \cdot V_{i-1,j} + A^2_{i,j-1} V_{i,j-1} + A^3_{i+1,j} \cdot V_{i+1,j} + A^4_{i,j+1} \cdot V_{i,j+1} - A^5_{i,j} \cdot V_{i,j} = -$$

$$- (\mu_j^2 - \nu_i^2)/R_{i,j} \tag{20}$$

$$-B^1_{i-1,j} \cdot R_{i-1,j} - B^2_{i,j-1} \cdot R_{i,j-1} + B^3_{i+1,j} \cdot R_{i+1,j} + B^4_{i,j+1} \cdot R_{i,j+1} + B^5_{i,j} \cdot R_{i,j} =$$

$$= - (\mu_j^2 - \nu_i^2), \tag{21}$$

unde $R = 1/\rho_v$, iar expresiile coeficienților A^k și $B^k (k = 1, \ldots 5)$ sînt prezentate în [26].

Sistemul (20) s-a rezolvat prin metoda iterației prin puncte după direcții alternate, iar (21) — prin metoda iterației prin puncte după direcția verticală.

Sistemul (17) s-a rezolvat și prin metoda elementelor finite (prezentată în [27]), utilizîndu-se cele n_D dreptunghiuri $\mathcal{D}_k$ determinate anterior. Pentru fiecare element finit $\mathcal{D}_k$ s-au folosit funcții test cu ordinul de apro-

ximare 4, de forma

$$V_k(\mu, \nu) = a_k^1 + a_k^2\mu + a_k^3\nu + a_k^4(\mu\nu). \tag{22}$$

Valorile potențialului în nodurile rețelei $V_{i,j}$ s-au determinat prin rezolvarea (cu metoda iterației bloc pe verticală) sistemului [27]:

$$[S_{i,j}][V_j] = [T_i]. \tag{23}$$

3. Prezentarea rezultatelor

Valorile numerice ale mărimilor V, $\bar{E}$ și ρ_v au fost calculate (pe un sistem IBM 360) pentru diferite structuri ale lui $\mathscr{D}$: $a = 2 \ldots 10$ mm, $r = 2 \ldots 20$ μm, $V = 6 \ldots 24$ kV, $\varepsilon_r = 2 \ldots 4$ și $\Phi = 0{,}2 \ldots 1$ eV, o parte din rezultate fiind prezentate în fig. 8 ... 13.

a) În funcție de caracteristicile geometrice ale domeniului (îndeosebi de raza de curbură a acului r), s-au utilizat rețele mai dese sau mai rare, cu pași — după μ și ν — egali sau diferiți. Astfel, pentru domeniul mărginit de suprafețele $\nu = 0$, $\nu = 0{,}999875$, $\mu = 1$ și $\mu = 1{,}5$, s-a utilizat o rețea cu 1600 noduri (1520 noduri „libere" și 80 noduri „forțate"). Cum însă valorile mari ale lui $\bar{E}$ (și ρ_v) se află în vecinătatea acului, în această zonă rețeaua a fost mai deasă ($h_{\mu 1} = 0{,}0125$ și $h_{\nu 1} = 0{,}025$) decît în rest ($h_{\mu 2} = 0{,}0132$ și $h_{\nu 2} = 0{,}00263$).

b) Pentru rezolvarea ecuațiilor (20) s-a utilizat un factor de subrelaxare ω (0,2 ... 0,8) aplicat lui $[R]$. S-a constatat că, pentru valori mari ale lui ω (de exemplu, $\omega = 2$) procesul de calcul iterativ converge slab către soluție [23].

c) Utilizarea metodei elementelor finite a permis reducerea duratei de calcul al potențialului electric cu 25...46 % (în funcție de configurația lui $\mathscr{D}$). Remarcăm însă că diferențele maxime dintre valorile lui V în $\mathscr{D}$ — obținute prin cele două metode — au fost sub 0,96 %.

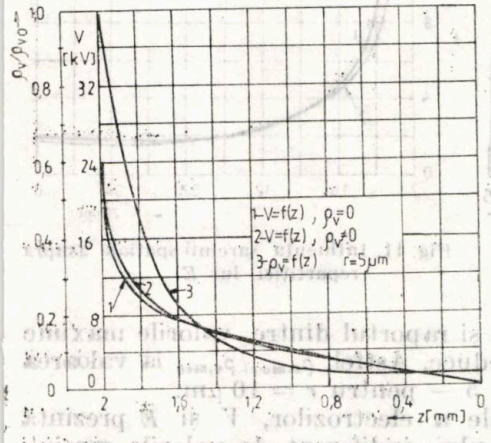


Fig. 8. Variații ale potențialului V și densității de sarcină ρ_v de-a lungul axei Oz.

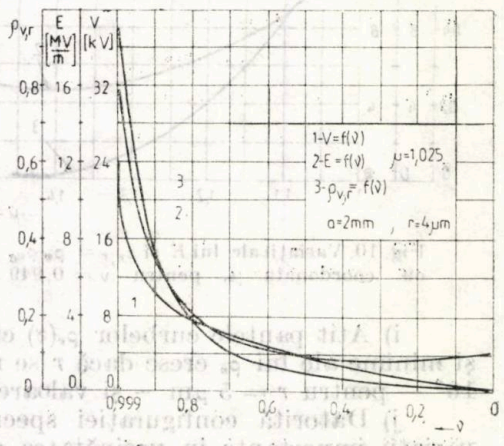


Fig. 9. Variații ale lui E și $\rho_{v,r} = \rho_v/\rho_{v0}$ cu coordonata ν, pentru $\mu = 1{,}025$

d) Se constată că valorile lui ρ_{v0} (calculate în vecinătatea acului) depind foarte mult de cele ale lui Φ. Astfel, o creștere a lui Φ cu 25% determină — pentru $a = 3$ mm, $r = 4\mu$m și $U = 24$ kV — o reducere a lui ρ_{v0} cu cca. 5 ordine de mărime.

e) Valorile maxime ale lui ρ_{v0} se reduc dacă permitivitatea dielectricului crește, ca urmare a reducerii barierei de potențial Φ (relația (3)). Astfel, pentru $\Phi = 1$ eV, ρ_{v0} scade de 10^3 ori dacă ε_r crește de la 2,2 (corespunzătoare polietilenei) la 4(corespunzătoare rășinilor epoxi).

f) Creșterea razei de curbură a acului r determină o reducere a valorilor maxime ale lui $\bar{E}(E_{max})$ — obținute la vîrful acului — , respectiv ale lui $\rho_{v0,max}$. Astfel, pentru $a = 2$ mm și $U = 12$ kV, E_{max} se reduce cu 2%, iar $\rho_{v0,max}$ cu un ordin de mărime, cînd r crește de la 5 la 7 μm.

g) Cîmpul electric se intensifică cînd distanța dintre electrozi crește. Acest efect este însă mai slab decît creșterea lui E ca urmare a reducerii lui r. Astfel, pentru $a = 5$ mm și $U = 24$ kV, reducerea lui r de la 5 la 2,5 μm determină o creștere a lui E_{max} cu 88 %, în timp ce, pentru $r = 5$ μm, reducerea lui a de la 5 la 3 mm determină o creștere a lui E_{max} cu 9,5%.

h) Densitatea de sarcină prezintă valori maxime în vecinătatea electrodului injectant și scade foarte rapid cu μ și ν (fig. 8, 9 și 10), adică se aglomerează într-o zonă relativ redusă din vecinătatea acului.

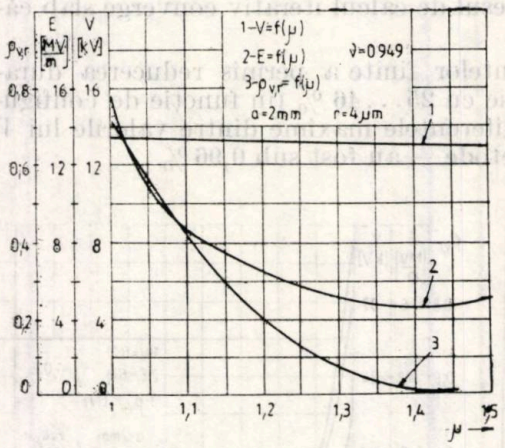


Fig. 10. Variații ale lui E și $\rho_{v,r} = \rho_v/\rho_{v0}$ cu coordonata μ, pentru $\nu = 0{,}949$

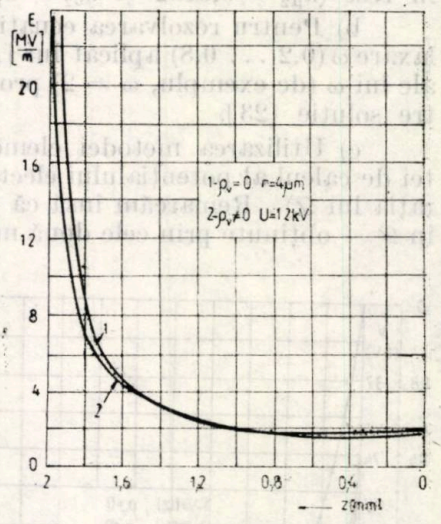


Fig. 11. Influența sarcinii spațiale asupra repartiției lui $\bar{E}$.

i) Atît pantele curbelor $\rho_v(z)$ cît și raportul dintre valorile maxime și minime ale lui ρ_v cresc dacă r se reduce. Astfel, $\rho_{v,max}/\rho_{v,min}$ ia valoarea 10^3 — pentru $r = 5$ μm — și valoarea 5 — pentru $r = 10$ μm.

j) Datorită configurației speciale a electrozilor, V și $\bar{E}$ prezintă variații importante în vecinătatea acului, indiferent de valorile sarcinii injectate [28]. Aceste variații se accentuează în cazurile în care $\rho_{v0} \neq 0$ (fig. 9 și 11), sarcina spațială prezentînd un pronunțat efect de ecran

(cîmpul electric slăbește în vecinătatea acului și se intensifică în vecinătatea electrodului plan (fig. 11).

k) Raportul dintre valorile extreme ale mărimii ρ_v — ca și cel dintre valorile extreme ale lui E — scade cînd distanța față de ac crește, realizîndu-se o uniformizare a repartiției acestora. Astfel, pentru $r=5$ μm, $a=2$ mm și $U=24$ kV, se obține $\rho_v(1)/\rho_v(1{,}5)=50$ și $E(1)/E(1{,}5)=2{,}31$ — pe suprafața $\nu=0{,}974$ — și $\rho_v(1)/\rho_v(1{,}5)=12$ și $E(1)/E(1{,}5)=1{,}41$ — pe suprafața $\nu=0{,}026$ (1 și 1,5 reprezentînd valorile lui μ).

1) Creșterea tensiunii U determină, pe de o parte, o creștere a densității sarcinii spațiale și, pe de altă parte, o intensificare a efectului de ecran al acesteia. Din acest motiv, calculul valorii maxime a intensității cîmpului electric cu relația [15]

$$E_{max}=\frac{2U}{r\cdot\ln\left(1+\frac{4a}{r}\right)} \tag{24}$$

conduce la erori cu atît mai mari cu cît injecția de sarcină este mai importantă (respectiv, U — mare, iar Φ și r — reduse). Astfel, pentru $\Phi=0{,}5$ eV, $r=1$ μm, $a=7$ mm și $U=24$ kV, se obține $E_{max}=45$ MV/m — utilizînd modelul electrozilor injectanți și $E_{max}=300$ MV/m — utilizînd relația (24).

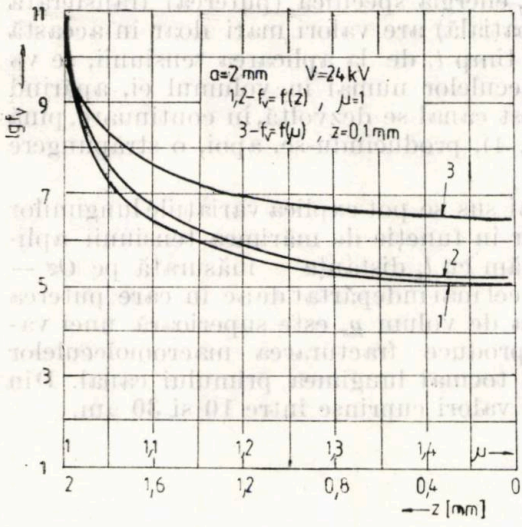


Fig. 12. Variații ale densității de forță $\bar{f}_v$ cu μ și ν.

m) Variații similare variațiilor lui $\bar{E}$ și ρ_v prezintă și densitatea de volum a forței $\bar{f}_v$ (fig. 12). Astfel, pentru $a=2$ mm și $r=5$ μm, f_v scade cu peste 3 ordine de mărime la 0,2 mm (pe axa Oz) de vîrful acului.

n) În cazul electrozilor slab injectanți (Φ mare) și cu curbură mare, $\bar{f}_v$ ia valori foarte mari în vecinătatea acestora (pentru $r=1$ μm, $U=24$ kV și $a=7$ mm, $f_{v,max}$ depășește 1 TN/m^3).

o) Creșterea distanței dintre electrozi conduce la reducerea valorilor lui $\bar{f}_v$ pe ansamblul lui $\mathcal{D}$ (mai importantă în vecinătatea electrodului plan). Astfel, pentru $r=5$ μm și $U=14$ kV, dacă a se mărește de la 2 la 3 mm, f_v se reduce cu 23,7 %— la vîrful acului — și cu 49 % — în vecinătatea planului.

4. Inițierea unui canal de străpungere

În paragrafele precedente am analizat repartiția sarcinii spațiale și a cîmpului electric în cazul regimului electrocinetic staționar. Să considerăm că sistemului de electrozi ac-plan i se aplică o tensiune alterna-

tivă sinusoidală de valoare efectivă U și frecvență $f = 50$ Hz. Sub acțiunea cîmpului electric, electronii emiși de ac — în alternanța negativă —, difuzează în dielectric și, în decursul unei semiperioade, acumulează energia W_e^-. În alternanța a 2-a (pozitivă), cîmpul electric se intensifică (datorită sarcinii spațiale), iar energia acumulată de electroni capătă o valoare W_e^+ superioară valorii corespunzătoare primei alternanțe ($W_e^+ > W_e^-$).

Prin ciocnirile cuasielastice cu rețeaua, electronii cedează (rețelei) doar a mia parte din energia pe care o posedă (datorită masei lor reduse [15]). Prin urmare, după scurgerea mai multor perioade, electronii pot acumula o energie suficientă pentru inițierea unor procese de interacțiune neelastică cu rețeaua (ionizări prin șoc etc.). Se pot produce, astfel, transformări ireversibile în structura dielectricului — corespunzătoare desfacerii legăturilor inter- și/sau intramoleculare — concretizate prin distrugerea, locală, a rețelei sale.

După cum rezultă din § 2.2, $\bar{E}$ și ρ_s iau valori mari doar într-o zonă de dimensiuni reduse, avînd forma unui paraboloid și lungimea (măsurată pe axa Oz) l . Drept urmare, energia specifică (puterea) transferată rețelei dielectricului (de sarcina spațială) are valori mari doar în această zonă și, deci, după un interval de timp t_i de la aplicarea tensiunii, se va produce o distrugere a macromoleculelor numai în volumul ei, apărînd primul canal al arborescenței. Acest canal se dezvoltă, în continuare, pînă la atingerea electrodului plan (fig. 4), producîndu-se, apoi, o străpungere completă a dielectricului (fig. 5).

Pe baza celor prezentate mai sus se pot explica variațiile lungimilor primelor canale ale arborescențelor în funcție de mărimea tensiunii aplicate (fig. 13). În acest sens, să notăm cu l_i distanța — măsurată pe Oz — de la vîrful acului și pînă în punctul cel mai îndepărtat de ac în care puterea transmisă dielectricului în unitatea de volum p_s este superioară unei valori limită p_{s0} (pentru care se produce fracturarea macromoleculelor dielectricului); aceasta reprezintă tocmai lungimea primului canal. Din calculele efectuate rezultă că l_i ia valori cuprinse între 10 și 30 μm.

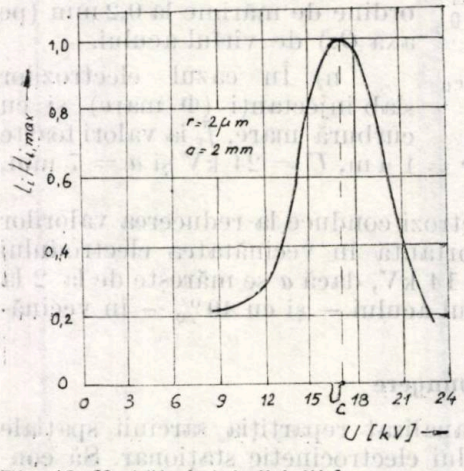


Fig. 13. Variația lungimii inițiale a canalului l_i cu tensiunea aplicată U

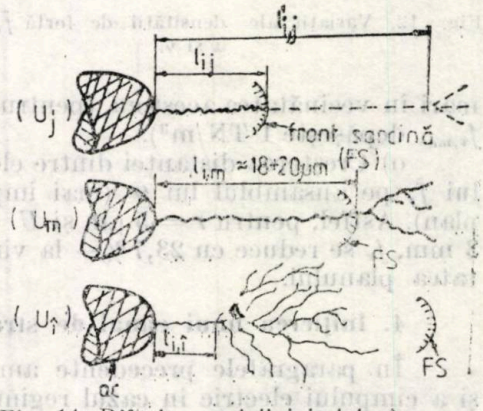


Fig. 14. Difuzia sarcinii injectate în interiorul dielectricului.

În cazul unor valori mari ale tensiunii aplicate U_i, mărimile E și ρ_v au valori mari, dar E scade foarte rapid de-a lungul lui Oz, astfel că $l_{i,i}$ ia valori relativ reduse. Energia transmisă de sarcina spațială rețelei atinge valoarea critică W_0 într-un interval de timp $t_{i,i}$, redus, dar pe o zonă de lungime $l_{i,i}$ mică (fig. 14).

Pentru valori medii ale tensiunii aplicate U_m, ρ_{v0} scade, efectul de ecran se reduce, E variază mai lent pe Oz și l_i crește, ajungînd la valoarea $l_{i,m} > l_{i,i}$ (fig. 14). Evident, puterea transmisă rețelei este mai redusă; drept urmare, intervalul de timp necesar pentru formarea primului canal $t_{i,m}$ are valori mai mari ($t_{i,m} > t_{i,i}$).

Dacă tensiunea scade sub o valoare critică U_c, atunci, datorită valorilor reduse ale lui E, condiția de formare a primului canal ($p_s > p_{s0}$) este satisfăcută doar pe o distanță redusă $l_{i,j} < l_{i,m}$, iar durata necesară formării acestuia $t_{i,j}$, ia valori superioare celor din cazurile precedente.

5. Concluzii

a) Pentru valori ale puterii — transmise dielectricului de sarcina spațială — superioare valorii critice p_{s0}, în structura dielectricului se produc fracturări ale macromoleculelor, inițiindu-se un canal de străpungere. Cum ρ_v și $\bar{E}$ iau valori mari doar în vecinătatea acului, rezultă că apariția primului canal al arborescenței este mai probabilă în această zonă.

b) Solicitările mecanice datorate cîmpului electric sînt maxime tot în zona din vecinătatea acului și, deși nu depășesc solicitările maxime admisibile ale dielectricului, ele favorizează apariția unor microfisuri (mai ales în cazul electrozilor slab injectanți) [29].

c) Prin fracturarea macromoleculelor se produc gaze a căror presiune poate atinge — pe durata t_i — valori considerabile (5 ... 50 bari); apar, astfel, forțe mecanice locale care pot provoca, prin fisurare, apariția unor canale.

d) Procesul de acumulare a energiei este mult mai intens în spațiile intersferulitice (amorfe), în care drumul liber mijlociu $\tilde{l}$ este mai mare decît în sferulite (părțile „cristaline"), dată fiind densitatea de masă mai redusă a zonelor amorfe (de aceea, rigiditatea dielectrică este de cîteva ori mai redusă decît în sferulite [30]).

e) Acumularea sarcinii spațiale se face, probabil, cu precădere pe suprafețele de separație dintre sferulite și zonele intersferulitice, datorită diferenței de mobilitate a electronilor în cele două spații (cristaline și amorfe).

f) În cazul unor ace cu raze foarte mici, dacă la vîrful unui asemenea ac se găsește o sferulită, procesele de mai sus sînt mult întîrziate ($\tilde{l}$ este mic în zonele cristaline) și t_i crește. Se poate explica și în acest mod, împrăștierea statistică mare a valorilor duratei de inițiere t_i obținute experimental [31].

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Whitehead*, Dielectric breakdown of solids, Clarendon Press, Oxford, 1957.
2. *J. J. O'Dwyer*, The theory of dielectric breakdown of solids, Clarendon Press, Oxford 1964.
3. *R. Stratton*, The theory of dielectrics breakdown in solids, Progress in Dielectrics, vol. 3, Heywood, London, 1961.
4. *I. Bunget, M. Popescu*, Fizica dielectricilor solizi, Editura științifică și enciclopedică, București, 1978.
5. *A. Ifrim, P. Notingher*, Materiale electrotehnice, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
6. *A. Ifrim, ș. a.*, Lucr. Simp. Nat. de Fiz. Sol., Cluj — Napoca, 1978, p. 14.
7. *T. W. Dakin*, Trans. A. I. E. E., 1954, *73*, p. 135.
8. *J. H. Mason*, Proc. I.E.E., 1951, *98*, p. 44.
9. *J. H. Mason*, I. E. E. Trans. Electr. Insul., 1978, *EI—13*, 4, p. 211.
10. *J. H. Mason*, Proc. I. E. E., 1960, *107 A*, 12, p. 551.
11. *H. Bertein*, R. G. E., 1970, *79*, 6, p. 497.
12. *B. Bolton*, I. E. E. Conf. on Dielectric Materials, July, 1970.
13. *F. Noto, N. Yushimura*, NAS NRC Conference on Electrical Insulation, 1974.
14. *F. Noto, K. Kawamura, H. Ono*, I. E. E. E. J., The Fourth Symposium on Electrical Insulating Materials, 1971, p. 35.
15. *T. Tanaka, A. Greenwood*, I. E. E. Trans. on P. A. S., 1978, *PAS-97*, 5, p. 1749.
16. *J. H. Mason*, Proc. I. E. E., 1955, *102C*, p. 254.
17. *E. J. McMahon*, I. E. E. Trans. Electr. Insul., 1978, *EI-13*, 4, p. 277.
18. *R. Goffaux*, R. G. E., 1972, *81*, 4, p. 247.
19. *P. Notingher*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Electrotechn. et Energ., 1979, *24*, 4, p. 651.
20. *R. Coelho*, R. G. E., 1966, *75*, 6, p. 759.
21. *A. Toureille*, Thèse, Univ. du Languedoc, 1974.
22. *C. Mofoc*, Fizica solidului, Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
23. *P. Notingher*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1983.
24. *P. Atten*, R.G.E., 1974, *83*, 3, p. 143.
25. *E. Durand*, Electrostatique, vol. 1, Dunod, Paris, 1964.
26. *A. Ifrim, P. Notingher*, Rapport HM/065/933, EDF, Paris, 1976.
27. *P. Notingher, C. D. Ioan*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Electrotechn. et Energ., 1978, *23*, 3, p. 363.
28. *A. Ifrim, C. Golovanov, P. Notingher*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ. 1976, *21*, p. 489.
29. *P. Notingher, Al. Reisler*, Lucr. Simp. Nat. de Fiz. și Tehn. Mat. Crist. și Amorfe, Iași 1980, p. 184.
30. *S. N. Kolesov*, I. E. E. E. Trans. on Electr. Ins., 1980, *EI-15*, 5.
31. *A. Ifrim*, ș. a. Lucr. Simp. Nat. de Fiz. Sol., Cluj-Napoca, 1978, p. 115.
32. *A. Ifrim, V. Fireteanu*, Lucr. Conf. Nat. de Electr. și Electroenerg., Timișoara, 1982, *vol. 8*, p. 111.

Influence of the Space Charge on the Breakdown of the Solid Dielectrics

The paper presents the calculus of the electric field and the space charge in homogenous isotropic dielectrics and for the needle-plan electrode systems, as well as the role of the space charge in the initiation of a breakdown channel for the case of the alternating electric fields.

C. Z.: 621.315
681.5.015.4

MODELE DISCRETE ASOCIATE DE CIRCUIT PENTRU BOBINELE ȘI CONDENSATOARELE PARAMETRICE

M. IORDACHE, LUCIA DUMITRIU, N. MARINESCU*

În lucrare se arată că bobinele cuplate magnetic sau nu și condensatoarele parametrice pot fi înlocuite, din punctul de vedere al integrării numerice, prin circuite rezistive asociate metodei regresive de derivare numerică — numite m o d e l e d i s c r e t e a s o c i a t e d e c i r c u i t.
Utilizarea acestor modele discrete asociate de circuit pentru bobinele și condensatoarele parametrice permite reducerea analizei circuitelor electrice parametrice în regim tranzitoriu la analiza unui șir de circuite electrice rezistive parametrice.

Din punctul de vedere al integrării numerice ecuația diferențială care caracterizează o bobină parametrică (cuplată sau nu magnetic) sau un condensator parametric, poate fi aproximată printr-un model de circuit rezistiv parametric asociat cu un algoritm implicit de integrare — numit m o d e l d i s c r e t a s o c i a t d e c i r c u i t. Adjectivul „asociat" este folosit pentru a sublinia că modelele de circuit asociate cu diferiți algoritmi de integrare se deosebesc între ele. Adjectivul „discret" este utilizat pentru a scoate în evidență că parametrii modelului de circuit sînt de natură discretă, i. e., ei diferă de la un pas de timp la altul.

Folosirea modelelor discrete asociate de circuit reduce analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu la analiza unui șir de circuite rezistive [1, 3].

Un model discret asociat de circuit se poate obține ușor din orice formulă implicită de integrare numerică. În prezenta lucrare vom deduce modele discrete asociate de circuit pentru bobinele (cuplate magnetic sau nu) și condensatoarele parametrice corespunzătoare formulei implicite de derivare regresivă (FDR) care aproximează cu orice precizie dorită valoarea curentă $\dot{x}(t_{n+1})$ a primei derivate în raport cu timpul a mărimii $x(t)$ la $t=t_{n+1}$ în funcție de x_{n+1} și p valori anterioare $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-p+1}$. Dacă notăm cu $\dot{x}_{n+1}$ valoarea aproximativă a lui $\dot{x}(t_{n+1})$, atunci formula de derivare regresivă (FDR) de ordinul p are, [1, 2], expresia

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot x_{n+1-k}, \tag{1}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sînt constante și $h = t_{n+1} - t_n$ este valoarea curentă a pasului în timp.

* Șef lucrări dr. ing.; Ing.; Ing., catedra Electrotehnică.

2. Model discret asociat de circuit pentru bobinele parametrice

Aplicînd formula (1) la rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi de forma

$$\dot{x} = f(x,\ t), \tag{3}$$

tensiunea fiecărei bobine parametrice

$$u_L = \frac{d\varphi_L}{dt} = \frac{d}{dt}(L(t)\cdot i_L(t)) = L(t)\frac{di_L}{dt} + i_L(t)\frac{dL}{dt} \tag{3}$$

se poate aproxima, la momentul curent $t = t_{n+1}$, cu relația

$$u_{L,n,+1} = (R_{L,n} + R_{L,n+1})i_{L,n+1} + e_{L,n+1}, \tag{4}$$

unde :

$$R_{L,n+1} = \frac{2a_0 L_{n+1}}{h} \tag{5}$$

$$L_{n+1} = L(t_{n+1}) \tag{6}$$

$$R_{L,n} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{p} a_k L_{n+1-k} \tag{7}$$

$$L_{n+1-k} = L(t_{n+1-k}) \tag{8}$$

$$e_{L,n+1} = \frac{L_{n+1}}{h}\sum_{k+1}^{p} a_k i_{L,n+1-k} \tag{9}$$

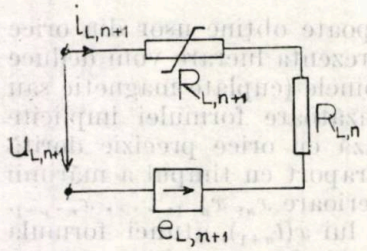


Fig. 1 — Model discret asociat de circuit pentru o bobină parametrică necuplată magnetic.

Ecuațiile (4) — (9) conduc la înlocuirea fiecărei bobine parametrice și necuplate magnetic, la momentul curent t_{n+1}, prin circuitul discret asociat din figura 1.

Bobinele parametrice cuplate magnetic (fig.2, a) sînt modelate, la momentul t_{n+1}, prin circuitul discret din figura 2 b, unde :

$$R_{1,n+1} = \frac{2a_0 L_{1,n+1}}{h} \tag{10}$$

$$L_{1,n+1} = L_1(t_{n+1}) \tag{11}$$

$$R_{1,n} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{p} a_k L_{1,n+1-k} \tag{12}$$

$$L_{1,n+1-k} = L_1(t_{n+1-k}) \tag{13}$$

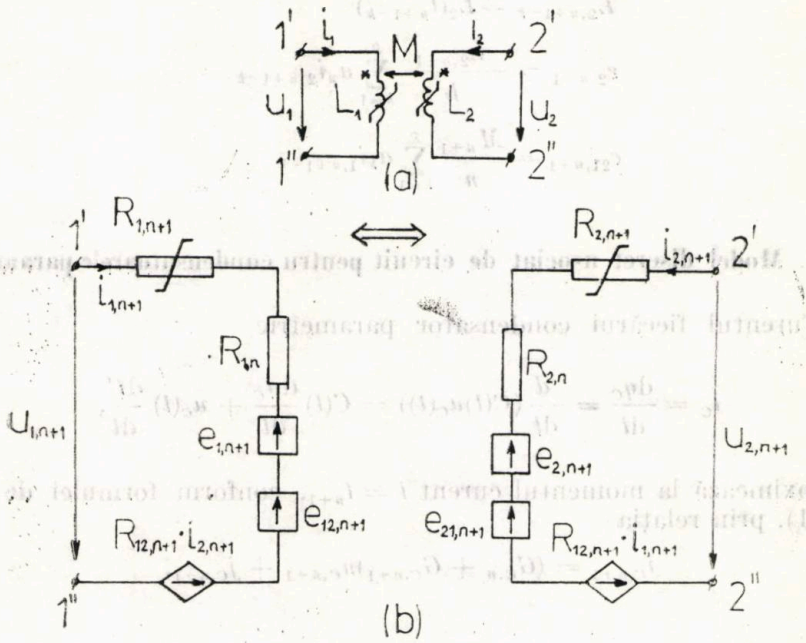


Fig. 2 — (a) Pereche de bobine parametrice cuplate magnetic;
— (b) Model discret asociat de circuit pentru o pereche de bobine parametrice cuplate magnetic.

$$e_{1,n+1} = \frac{L_{1,\,n+1}}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k i_{1,n+1-k} \tag{14}$$

$$e_{12,n+1} = \frac{M_{n+1}}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k i_{2,n+1-k} \tag{15}$$

$$M_{n+1} = M(t_{n+1}) \tag{16}$$

$$R_{12,n+1} = R_{21,n+1} = \frac{2a_0 M_{n+1}}{h} + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k M_{n+1-k} \tag{17}$$

$$M_{n+1-k} = M(t_{n+1-k}) \tag{18}$$

$$R_{2,n+1} = \frac{2a_0 L_{2,n+1}}{h} \tag{19}$$

$$L_{2,n+1} = L_2(t_{n+1}) \tag{20}$$

$$R_{2,n} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k L_{2,n+1-k} \tag{21}$$

$$L_{2,n+1-k} = L_2(t_{n+1-k}) \tag{22}$$

$$e_{2,n+1} = \frac{L_{2,n+1}}{h} \sum_{k=1}^{p} a_n i_{2,n+1-k} \tag{23}$$

$$e_{21,n+1} = \frac{M_{n+1}}{n} \sum_{k=1}^{p} a_k i_{1,n+1-k} \tag{24}$$

3. Model discret asociat de circuit pentru condensatoarele parametrice

Curentul fiecărui condensator parametric

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}(C(t)u_C(t)) = C(t)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C(t)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}, \tag{25}$$

se aproximează la momentul curent $t = t_{n+1}$, conform formulei de derivare (1), prin relația

$$i_{C,n+1} = (G_{C,n} + G_{C,n+1})u_{C,n+1} + j_{C,n+1}, \tag{26}$$

unde :

$$G_{C,n+1} = \frac{2a_0 C_{n+1}}{h} \tag{27}$$

$$C_{n+1} = C(t_{n+1}) \tag{28}$$

$$G_{C,n} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k C_{n+1-k} \tag{29}$$

$$C_{n+1-k} = C(t_{n+1-k}) \tag{30}$$

$$j_{C,n+1} = \frac{C_{n+1}}{h} \sum_{k=1}^{p} a_k u_{C,n+1-k} \tag{31}$$

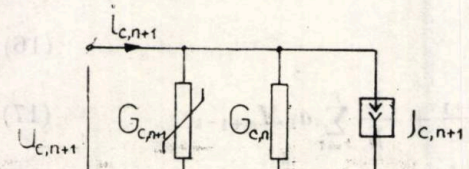


Fig. 3 — Modelul discret asociat de circuit pentru condensatorul parametric.

Relațiile (26) — (31) permit înlocuirea fiecărui condensator parametric, la momentul $t_{n+1} = t$, cu circuitul discret asociat reprezentate în figura 3.

Concluzii

Modelele discrete asociate de circuit pentru bobinele și condensatoarele parametrice prezentate în lucrare au o deosebită importanță practică în analiza circuitelor electrice parametrice în regim tranzitoriu. De

fapt, înlocuirea fiecărei bobine parametrice (cuplată magnetic sau nu) și a fiecărui condensator parametric cu modelele discrete asociate de circuit din figurile 1(2) respectiv 3, reduce analiza circuitelor electrice parametrice în regim tranzitoriu la analiza unui șir de circuite rezistive parametrice ceea ce elimină problema spinoasă a elementelor în exces [3].

Așa cum se prezintă în [2] analiza circuitelor electrice rezistive parametrice se poate face în funcție de modul cum se introduc rezistoarele parametrice în arborele normal comun (ANC) selectat în grafurile G^I și G^U, prin metoda tensiunilor rezistoarelor parametrice ramuri (cînd în ANC se introduce un număr maxim posibil de rezistoare parametrice) și prin metoda curenților rezistoarelor parametrice coarde (cînd în ANC se introduce un număr minim posibil de rezistoare parametrice).

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Iordache, N. Marinescu, Cl. Mihai*, A new computer-aided circuit analysis method, International AMSE Summer Conference, Athens June 27—29, 1984.
2. *M. Iordache*, O nouă metodă de analiză a circuitelor electrice rezistive parametrice, Comunicare la a doua Conferință Națională de electronică și automatică, 15—16 noiembrie 1984, București.
3. *L. O. Chua, P. M. Lin*, Computer-aided analysis of electronic circuits : Algorithms and Computational techniques, Englewood • Cliffs, HJ : Prentice Hall, 1975.

Associated Discrete Circuit Models for Parameter Inductors and Capacitors

It is shown in this paper that parameter magnetic coupled or uncoupled inductors and parameter capacitors can be replaced, according to numerical integration algorithm, by resistive circuits associated with the backward-differentiation method called *associated discrete circuit models*.
The use of these associated discrete circuit models instead of parameter inductors and capacitors allows reducing of the analysis of parameter electric networks in transient behaviour to the analysis of a sequence of parameter resistive electric networks.

C.Z.: 621.314
519.6

CALCULUL NUMERIC AL CIMPULUI DE DISPERSIE DIN TRANSFORMATORULUI ELECTRIC

M. MIHALACHE*

În lucrare se rezolvă, printr-o metodă numerică (metoda elementelor finite) cîmpul magnetic de dispersie din două domenii specifice ale transformatorului: cel interior (corespunzătoar ferestrei) și cel exterior. Pe baza soluției problemei de cîmp se calculează apoi mărimile globale (energia magnetică, inductivitatea de dispersie), și locale (distribuția densităților de volum ale forțelor axiale și radiale) aferente. Metodele și relațiile de calcul folosite sînt însoțite de un exemplu numeric realizate cu date de proiectare ale unui transformator trifazat de 250 kVA.

Introducere

Rezolvarea cîmpului magnetic de dispersie, presupus bidimensional, cunoaște, în timp, mai multe etape începînd cu metodele analitice [1]. metodele de modelare (pe hîrtie conductoare, pe model electrocinetic,) și mai recent metodele numerice, dintre care metoda elemențelor finite [2], [5] prezintă un deosebit interes din partea tot mai multor autori.

Deși în realitate cîmpul magnetic de dispersie al transformatorului (monofazat sau trifazat) are o structură complexă, tridimensională, rezultate mai apropiate de realitate se pot obține și în ipoteza cîmpului bidimensional rezolvat în două domenii particulare plan paralele, și anume cel folosit în mod tridimensional, aferent ferestrei transformatorului (domeniul interior, $-D_i$) și respectiv cel corespunzător spațiului din afara ferestrei (domeniul exterior, $-D_e$)

Ca ipoteze simplificatoare, se va neglija conductibilitatea electrică a porțiunilor cu fier ($\sigma = 0$), iar solenațiile celor două înfășurări (de joasă și de înaltă tensiune) se compensează reciproc, ceea ce revine la neglijarea curentului de magnetizare, respectiv permeabilitatea magnetică a fierului este infinită ($\mu_{Fe} = \infty$).

1. Rezolvarea numerică a cîmpului magnetic de dispersie bidimensional prin metoda elementelor finite

În coordonate carteziene, componenta axială $A(x, y)$ a potențialului magnetic vector satisface, în ipotezele de mai sus, următoarea ecuație de tip Poisson:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 J(x, y) \tag{1}$$

unde $J(x, y)$ reprezintă distribuția densității de curent.

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mașini electrice

După cum este cunoscut, [2] rezolvarea ecuației (1), cu condiții pe frontiera Dirichlet sau Neumann omogene, este echivalentă cu găsirea soluției $A(x, y)$ care minimizează funcționala:

$$F = \iint_{D_e} \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] - J \cdot A \right\} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \tag{2}$$

Utilizînd metoda elementelor finite (M. E. F.) domeniul de calcul D_e este „discretizat" în subdomenii (elemente) în cadrul cărora se poate utiliza o expresie de interpolare simplă pentru funcția $A(x, y)$- în funcție de potențialele nodurilor de interconexiune și coordonatele geometrice ale acestora — obținîndu-se astfel, următorul sistem de ecuații algebrice liniare:

$$[H] \cdot [A] = [F] \tag{3}$$

În ceea ce privește metoda de rezolvare a sistemului (3), avînd în vedere proprietățile speciale ale matricei $[H]$ — simetrica, pozitiv definita și de tip banda — pentru un număr de noduri ale rețelei nu prea mare (circa 1000) utilizarea metodei directe Cholesky, [3], [6], apare ca cea mai indicată. Conform acestei metode, matricea $[H]$ admite o descompunere de tipul:

$$[H] = [R]^T \cdot [R] \tag{4}$$

unde $[R]$ este o matrice triangulară superioară, iar $[R]^T$ transpusa sa. Înlocuind (4) în (3) obținem:

$$[R]^T \cdot [R] \cdot [A] = [F] \tag{5}$$

Introducînd vectorul auxiliar $[AY] = [A] \cdot [R]$ soluționarea sistemului (5) va rezulta din soluționarea succesivă a următoarelor două sisteme de ecuații triangulizate:

$$\begin{aligned} [R]^T \cdot [AY] &= [F] \\ [R] \cdot [A\,[&= [AY] \end{aligned} \tag{6}$$

2. Calculul energiei magnetice

Avînd rezolvată problema repartiției potențialului magnetic vector în nodurile rețelei $A_i(x_i, y_i)$, se pot determina în continuare mărimile specifice aferente cîmpului de dispersie din transformator, precum energia magnetică, inductivitatea de dispersie, forțele axiale și radiale, etc. Astfel, densitatea liniară $\left(\text{măsurată în } \frac{J}{M} \right)$ a energiei magnetice (W_m^1) se poate calcula prin cele două metode, echivalente:

— în funcție de potențialul magnetic vector, $A(x, y)$:

$$W_m^{(1)} = \frac{1}{2} \iint_{D_e} A(x, y) \cdot J(x, y) \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdot 1 \tag{7}$$

— în funcţie de inducţia magnetica $B(x, y)$:

$$W_m^{(1)} = \frac{1}{2\mu_0} \iint_{D_c} B^2(x, y)\ \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot 1 \tag{8}$$

Alegînd ca element de discretizare triunghiul de ordinul 1, definit prin coordonatele x, y ale vîrfurilor i, j, k, componentele B_x şi B_y ale inducţiei magnetice (constanta pe element) se calculează cu relaţiile :

$$B_x = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2S^e} [(x_k - x_j)A_i + (x_i - x_k)A_j + (x_j - x_i)A_k] \tag{9}$$

şi respectiv :

$$B_y = -\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2S^e} [(y_j - y_k)\, A_i + (y_k - y_i) \cdot A_j + (y_i - y_j)A_k] \tag{10}$$

unde S^e reprezintă suprafaţa triunghiului de vîrfuri i, j, k.
Cu relaţiile (9) şi (10) se determină apoi modulul :

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 \tag{11}$$

astfel că densitatea liniară a energiei magnetice $W_m^{(1)}$ se calculează conform relaţiei (8) însumînd contribuţiile $\frac{B^2 S^e}{2\mu_0}$ ale tuturor elementelor ce constituie domeniul de calcul.
În mod similar, conform relaţiei (7) $W_m^{(1)}$ se calculează însumînd pentru toate elementele aferente înfăşurărilor (respectiv acolo unde $J \neq 0$) contribuţiile :

$$W_m^{(1)} = \frac{J^e \cdot S^e}{2} \cdot \frac{A_i + A_j + A_k}{3} \tag{12}$$

Avînd determinată densitatea liniară a energiei magnetice în cele două domenii particulare, plan-paralele, D_i şi D_e, inductivitatea de dispersie (sau de scurtcircuit L_{sc}) se poate calcula printr-o relaţie îmbunătăţită. faţă de cea uzuală ce consideră numai soluţia din domeniul interior D_i :

$$L_{sc} = \frac{2W_m}{I^2} = 2\frac{(W_m)_i + (W_m)_e}{I^2} = 2\frac{[(w'_m) \cdot l_i + (w'_m)_e \cdot l_e]}{I^2} \tag{13}$$

unde l_i reprezintă lungimea medie din domeniul interior, aproximată cu relaţia :

$$l_i \cong = D_m \cdot \arcsin \frac{D_i}{D_m} \tag{14}$$

iar l_e lungimea medie din domeniul exterior,

$$l_e \cong \pi D_m - l_i \tag{15}$$

D_m fiind diametrul mediu al celor două înfășurări, iar D_c diametrul coloanei.

3. Exemplu numeric

Pentru un transformator trifazat de 250 kVA, $U_{1N} = 0{,}4$ kV (conexiune stea și $U_{2N} = 15$kV (conexiune triunghi) se cunosc următoarele date constructive :
$a_1 = 1{,}7$ cm · (cu un canal axial, $\Delta_1 = 0{,}5$ cm.) ; $a_{12} = 1{,}5$ cm. ; $D_m = 26$ cm $D_c = 16$ cm.
$a_2 = 2{,}5$ cm · (cu un canal axial, $\Delta_2 = 0{,}5$ cm). ; $w_1 = 36$ spire ; $1_H = 41$ cm.
Domeniul de calcul $\left(\frac{1}{2}\right.$ din fereastra transformatorului respectiv din spațiul exterior, din motive de simetrie) corespunde celui din fig. 1, condițiile pe frontieră fiind omogene (de tip Neumann, $\frac{\partial \Delta}{\partial n} = 0$, pentru axele de simetrie și frontierele cu fier, și de tip Dirichlet, $A = 0$, pentru nodul 0 din domeniul interior, respectiv pe frontiera NP din domeniul exterior).

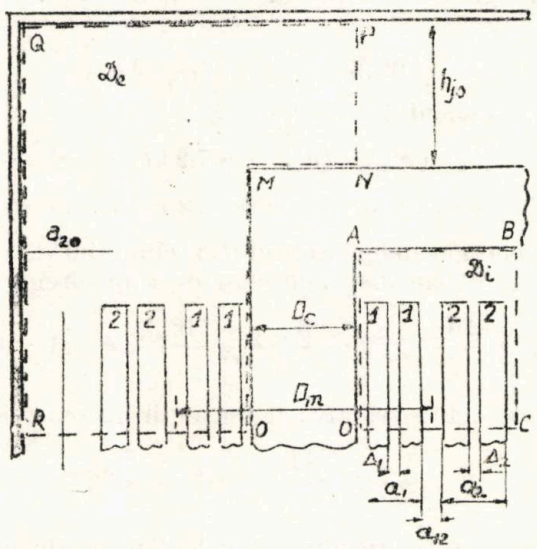


Fig. 1

Folosind pentru discretizare elementul triunghiular de ordinul i rețeaua obținută are 231 de noduri și 520 de elemente pentru domeniul interior și respectiv 273 de noduri și 520 de elemente pentru domeniul

exterior. Elementele înfășurării de joasă tensiune (de lărgime a_1) sînt caracterizate de densitatea de curent $J_1 = 3{,}45 \frac{A}{mm} 2$, corespunzătoare curentului $I_1 = 471{,}5$ A, pentru înfășurarea de înaltă tensiune rezultînd $J_2 = 2{,}07 \frac{A}{mm} 2$.

3.1. *Calculul energiei magnetice*

Utilizînd relațiile de calcul prezentate în § 2 s-a calculat densitatea de energie magnetică, prin ambele metode (7), (8) obținîndu-se valorile :

— pentru domeniul interior (fereastra, D_i), $(W_m^1)_i = 11{,}62 \frac{J}{m}$

— pentru domeniul exterior (D_e), $(w_m^1)_e = 11{,}23 \frac{J}{m}$

Energia magnetică totală a cîmpului de dispersie se obține multiplicînd densitatea liniară $\left(\frac{J}{m}\right)$ cu lungimea medie corespunzătoare (l_i sau l_e) calculată conform relațiilor (14) și (15) :

$$\begin{aligned} l_i &\equiv D_m \cdot \text{arc sin} \frac{Dc}{Dm} = 17{,}23 \quad \text{cm} \\ l_e &\equiv \pi D_m - l_i \qquad\quad = 64{,}45 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{16}$$

Astfel, energia magnetică conținută în domeniul interior (D_i) are valoarea :

$$(W_m)_i = (w_m^1)_i \cdot l_i = 2J \tag{17}$$

respectiv pentru domeniul exterior (D_e) :

$$(W_m)_e = (w_m^1)_e \cdot l_e = 7{,}23J \tag{18}$$

3.2. *Calculul componentei reactive a tensiunii de scurtcircuit*

Cunoscînd energia magnetică totală a cîmpului de dispersie se poate calcula inductivitatea de dispersie (sau de scurtcircuit, L_{sc}) :

$$L_{sc} = \frac{2W_m}{I_1^2} = 2 \cdot \frac{(W_m)_i + (W_m)_e}{I_1^2} = 8{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ H} \tag{19}$$

și respectiv, componenta reactivă a tensiunii de scurtcircuit :

$$u_{scr}(\%) = \frac{\omega L_{sc}}{Z_{1N}} \cdot 100 = 4{,}08\% \tag{20}$$

Pentru încadrarea acestui rezultat să calculăm mărimea $u_{scr}(\%)$ printr-o relație analitică cunoscută ;

$$u_{scr}(\%) = 7{,}89 \cdot \frac{f \cdot w_1^2 \cdot \beta \cdot a_R \cdot k_R}{z_{1N}} \cdot 10^{-6} \tag{21}$$

unde k_R reprezintă factorul lui Rogowski calculabil cu relația:

$$k_R \cong 1 - \frac{a_1 + a_2 + a_{12}}{\pi l_H} = 0{,}96 \tag{22}$$

De asemenea:

$$a_R = a_{12} + \frac{a_1 + a_2}{3} = 2{,}9 \text{ cm} \tag{23}$$

Cu $\beta = 1{,}99$ și $Z_{1N} = 0{,}64\ \Omega$ se obține pentru componenta reactivă a tensiunii de scurtcircuit valoarea:

$$u_{scr}\ (\%) = 4{,}42\% \tag{24}$$

superior cu 7,7% rezultatului (20).

3.3. *Calculul forțelor axiale și radiale*

Din soluția problemei de cîmp se pot calcula apoi componentele B_x și B_y ale inducției magnetice din fiecare element al înfășurării de joasă sau înaltă tensiune, mărimi proporționale cu densitățile de volum ale forțelor axiale (f_a) respectiv radiale (f_r), conform relațiilor:

$$f_a = J \cdot B_x, \qquad f_1 = J \cdot B_y \tag{25}$$

În fig. 2 a s-a reprezentat distribuția, pe înălțimea înfășurării de joasă tensiune (plasată lîngă miezul magnetic, de partea domeniului interior D_i, respectiv de partea domeniului exterior D_e) a densității de volum a forțelor axiale, $f_a \left(\text{in } \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right)$ calculate pentru elementele vecine canalului de răcire și la curent nominal.

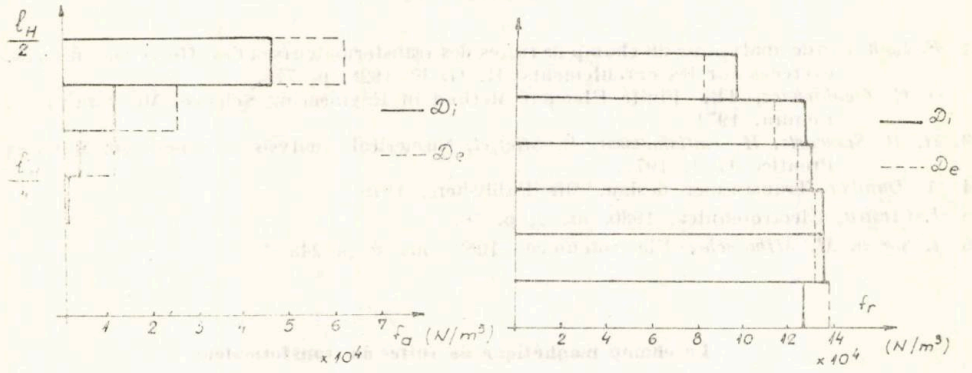


Fig. 2a Fig. 2b

În mod similar, în fig. 2b s-a reprezentat distribuția densității de volum a forțelor radiale (f_r).

Dacă în cazul forțelor radiale au rezultat valori apropiate pentru porțiunea de spiră situată în fereastra (D_i) respectiv în exterior (D_e),

diferențe notabile există în cazul forțelor axiale (fig. 2. a) rezultînd valori mai mari (cu circa 30—50%) pentru forțele ce acționează în domeniul exterior.

Concluzii

Rezultatele prezentate în lucrare, obținute prin rezolvarea numerică a cîmpului de dispersie din transformator, evidențiază două aspecte interesante. Primul, confirmă suficienta considerării configurației cîmpului magnetic din fereastra transformatorului pentru calculul mărimilor „globale" cum ar fi : energia magnetică, respectiv inductivitatea de dispersie (diferențele rezultate la calculul densității liniare a energiei magnetice în cele două domenii fiind minore : $11{,}62 \frac{J}{m}$ pentru domeniul interior și $11{,}23 \frac{J}{m}$ pentru cel exterior).

Al doilea aspect evidențiază utilitatea abordării spațiale a cîmpului de scăpări (dispersie) în vederea determinării distribuției corecte a unor mărimi „locale" cum sînt spre exemplu densitățile de volum ale forțelor axiale și radiale. Din acest punct de vedere s-au obținut diferențe importante între valorile forțelor axiale ce acționează pe porțiunea din fereastră a spirei, respectiv pe porțiunea din exteriorul ferestrei (acestea din urmă rezultînd superioare celor dintîi cu 30—50%). Drept, urmare, solicitările mecanice ale transformatorului sînt în realitate mai complexe, înfășurările fiind supuse unor acțiuni combinate de forțe și cupluri de forțe, exercitate asupra spirelor plasate parțial în fereastră (D_i) și parțial în exterior.

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Roth*, Étude analytique du champ de fuites des transformateurs et des éfforts mécaniques, exercées sur les enroulements. R. G. E. 1928, p. 773.
2. *O. C. Zienkiewicz*, The Finite Element Method in Engineering Science. Mc. Graw Hill, Londra, 1971.
3. *H. R. Schwartz, H. Rutishausser, E. Stieffel*, Numerical Analysis of Symmetric Matrices Prentice Hall, 1973.
4. *A. Dymkov*, Transformer design, Mir Publishers, 1975.
5. *I. Cîrstea*, Electrotehnica, 1980, nr. 2, p. 56.
6. *I. Soran, M. Mihalache*, Electrotehnica, 1982, nr. 6, p. 243.

La champ magnétique de fuites du transformateur

Dans ce travail on resoudre, par la méthode des élements finies, le champ magnétique de fuites du transformateur dans deux domaines planes spécifiques : le domaine intérieur (D_i) et le domaine extérieur (D_e).
Ces résultats extrêmements rapprochées sont obtenues pour les densités d'énergie magnetique dans les deux domaines, tandis que des différences notables existent dans la distribution des forces axiales et radiales.

C.Z.: 621.318.2
519.6

UN MODÈLE SIMPLIFIÉ DE L'AIMANT PERMANENT POUR LES CALCULS NUMÉRIQUES

I. F. SORAN*

On propose un modèle d'aimant permanent à couche de courant et perméabilité variables en dépendance du point de fonctionnement. Un processus itératif fixe ce point, ainsi que les valeurs finales de la perméabilité et de la densité linéaire de courant. La convergence du schéma est très bonne.

1. Introduction

L'utilisation des aimants permanents dans la construction des machines électriques de petite et moyenne puissance est de plus en plus frequente grace aux avantages présentés abondamment par la littérature technique [1]. Souvent le problème de champ magnétique dans la machine à l'excitation mixte, ou due uniquement aux aimants permanents est résolu par des méthodes numériques. Pour le cas de l'excitation mixte la source est constituée par le courant de conduction et l'aimant est remplacé par un matériel ayant une dépendance B—H de type hystérésis. Il existe une foule de solutions pour façonner la courbe de hystérésis par des expressions analytiques [3], [4], [7]. Là où l'aimant permanent est l'unique source de champ magnétique qu'il soit, on utilise souvent la modélisation de l'aimant permanent par un matériel ayant la perméabilité de l'air et une couche de courant [5], [6], [10], [11] de densité linéaire :

$$J_0 = \frac{B_r}{\mu_0} \tag{1}$$

avec : B_r — l'induction magnétique rémanente.

Ce modéle peut être amélioré en considérant la susceptibilité magnétique du tenseur dépendant de l'induction magnétique [6], [8]. Récemment [9] un modèle avec la perméabilité magnétique variable et courant distribué dans toute la masse de l'aimant a été mis au point. L'exposé qui s'ensuit propose remplacer l'aimant dans les calculs numériques par un matériel à perméabilité magnétique variable et une couche de courant de densité variable, dépendantes l'une et l'autre du point de fonctionnement de l'aimant. Un processus itératif fixe ce point ainsi que les valeurs finales de la perméabilité et de la densité linéaire de courant. La convergence du schéma est trés bonne.

2. Le modele aux matériaux magnétiques doux et charge linéaire

L'expression de l'induction magnétique pour l'aimant permanent :

$$\bar{B} = \mu_0(\mu_r \bar{H} + \bar{M}_0) = \mu \bar{H} + \bar{B}_{rem} \tag{2}$$

* Lecteur, Chaire de Machines électriques

avec :

$$\mu_r = 1 + \varkappa$$

contient l'aimantation ermanente $\bar{M}_0$, indépendante de l'intensité du champ magnétique $\bar{H}$ et $\varkappa$ la susceptibilité magnétique dépendante de $\bar{H}$. En utilisant le potentiel magnétique vecteur $\bar{A}$, l'équation différentielle régisant le champ magnétique devienne :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\;\bar{A}\right) = \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\;\bar{B}_{rem}\right) + \text{rot}(\bar{H}) \tag{3}$$

L'utilisation des méthodes variationnelles exige la construction d'une fonctionelle appropriée, différente de celle utilisée pour l'excitation à courant de conduction. Bien que cette façon de résoudre le problème soit correcte il existe les raisons suivantes pour remplacer l'aimant permanent par un modèle à courant de conduction et perméabilité magnétique μ_m.

1. Les caractéristiques B—H réelles des aimants permanents varient beaucoup par rapport à la caractéristique de catalog et sont des caractéristiques statiques ayant l'induction $\bar{B}$ mesurée dans le sens de $\bar{H}$.

2. Dans les circuits magnétiques, là où est utilisé le modèle, l'intéret porte toujours sur les élements extérieurs à l'aimant : entrefer, dents, joug, etc.

3. Les pôles de l'aimant sont en contact avec des matériaux magnétiques de grande perméabilite magnétique $\mu \gg \mu_m$, on peut donc considérer une aimantation approximativement uniforme.

4. L'utilisation des paquets de programmes mis au point pour les courants de conduction présente l'avantage de l'économie de temps et de la sécurité du travail offertes par une longue expérience d'exploatation.

5. Il n'y a aucune raison pour résoudre un problème avec une précision supérieure à la précision des données d'entrée.

On propose donc le remplacement de l'aimant par un matériel pour lequel :

$$\bar{B}_m = \mu_m \bar{H}_m \tag{4}$$

La fonction $\mu_m = f(|\bar{B}_m|)$ ou $\mu_m = f(|\bar{H}_m|)$ découle de la courbe induction rémanente-champ coercitif donnée par le fournisseur de l'aimant. La force magnétomotrice équivalente θ a la valeur correcte :

$$\theta = 2H_m l_m \tag{5}$$

seulement si :

$$H_m l_m = \int_\Gamma \bar{H} \cdot \mathrm{d}\bar{l} \tag{6}$$

la courbe Γ étant à l'extérieur de l'aimant. La longueur de l'aimant réel (et du modèle) est l_m.

La figure 1a présente un circuit magnétique simple à l'aimant permanent. Ensuite (fig. 1b) est présenté le modèle de [6], [10], [11] et le modèle proposé par l'auteur dans la figure 1c. La façon de fixer le point de

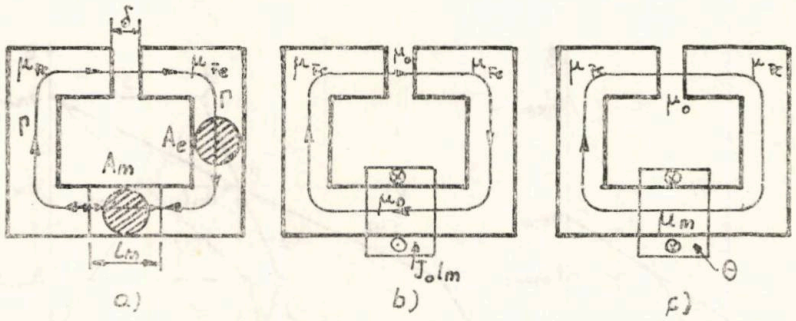


Fig. 1. a) Un circuit magnétique simple.
b) Le modèle à densité J_0 constante et perméabilité
c) Le modèle à la force magnétomotrice et perméabilité variables.

fonctionnement P' pour le modèle de la fig. 1b est présenté dans la fig. 2 où $\Delta_{s\Sigma}$ est la droite de charge du circuit magnétique entier, la longueur l_m de l'aimant remplacé par de l'air comprise. Pour simplifier le raisonnement qui s'ensuit on va remplacer tout le circuit magnétique extérieur à l'aimant par un circuit équivalent ayant μ_e, l_e, A_e, paramètres estimés à l'aide de la configuration réelle. On a ainsi pour le point P' de la fig. 2 l'induction magnétique B_m^*

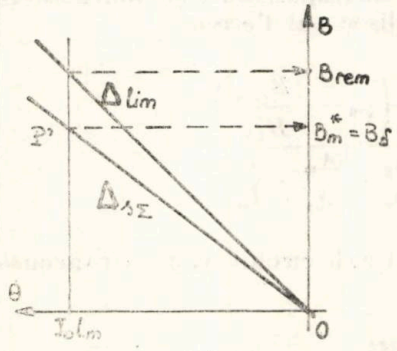


Fig. 2. La façon d'établir le point de fonctionnement pour le modèle de la fig. 1 b.

$$B_m^* = \frac{J_0 l_m}{\frac{l_m}{\mu_0}\left(1 + \frac{l_e A_m \mu_0}{l_m A_e \mu_e}\right)} \cdot \frac{B_{rem}}{1 + \frac{l_e A_m \mu_0}{l_m A_e \mu_e}} \qquad (7)$$

La caractéristique de la „charge" Δ_{lim} représente le cas limite d'un circuit magnétique idéal extérieur à l'aimant permanent, avec $\mu_e \cong \infty$

En connaissant la caractéristique B-H de l'aimant permanent, les dimensions et les proprietés du matériel du circuit magnétique nous pouvons construire la caractéristique d'aimantation du circuit de la fig. 1c, c'est-à-dire $H_m l_m + H_e l_e = f(B)$. L'approximation de la caractéristique B-H des aimants permanents par deux droites (fig. 3a) croisées au coude (B_{coude} ; H_{coude}) est généralement acceptée [4], [6]. La caractéristique d'aimantation du circuit entier aura la forme (3) de la fig. 3b, c'est-à-dire la somme des caractéristiques (1)

et (2). La caractéristique globale (3)va se couper avec la caractéristique (4) de la source idéale remplaçante de l'aimant permanent pour nous donner le point de fonctionnement P. En vertu de la relation (5), la caractéristique (4) est tirée de la caractéristique (1) en doublant les abscisses.

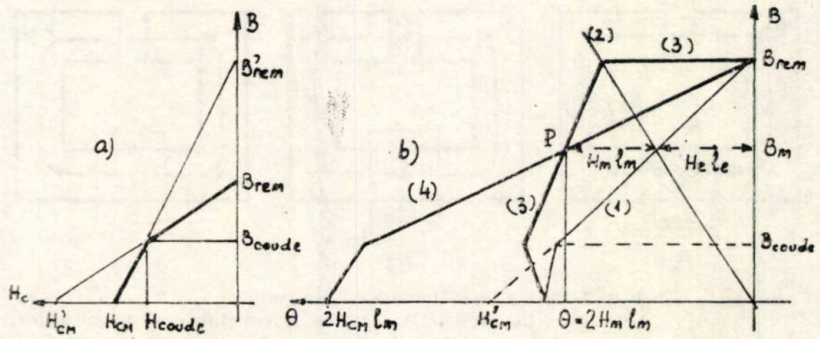


Fig. 3. Explicative au modèle de la fig. 1c.

En supposant une induction finale $B_{coude} < B_m < B_{rem}$ il y aura pour le point de fonctionnement :

$$B_m = \frac{B_{rem}}{1 + \frac{B_{rem}}{H'_{cM}} \cdot \frac{1}{\mu_e} \cdot \frac{A_m l_e}{A_e l_m}} \tag{8}$$

Le modèle de la fig. 1b et l'expression de B_m^* correspondante (7) fournissent une valeur de l'induction magnétique pénalisée par l'erreur :

$$\varepsilon = \frac{B_m^* - B_m}{B_m} = \frac{\frac{l_e A_m 1}{l_m A_e \mu_e}\left(\mu_0 - \frac{B_{rem}}{H'_{cM}}\right)}{1 + \frac{\mu_0}{\mu_e} \cdot \frac{A_m}{A_e} \cdot \frac{l_c}{l_m}}$$

Cette erreur peut déranger si $A_m/A_l \cdot l_e/l_m \simeq 1$ et le circuit exterieur accuse une saturation marquée $\mu_d \simeq \mu_0$.
Sa valeur :

$$\varepsilon' = \frac{\mu_0 - B_{rem}/H'_{cM}}{\mu_e + \mu_0} \tag{10}$$

est grande car :

$$\frac{B_{rem}}{H'_{cM}\,\mu_0} \simeq 2 \div 10 \tag{11}$$

pour les aimants permanents utilisés d'habitude.
Le modèle de la fig. 1 b présenté par [10], [11] fournit donc des valeurs satisfaisantes de l'induction B_m^* seulement pour les circuits magnétiques

non-saturés, avec des entrefers réduits. Le modèle proposé par l'auteur reste valable même pour le cas des circuits fortement saturés ou à l'entrefer considérable, ce que constitue un avantage malgré les complications du modèle.

3. L'utilisation du modèle proposé dans les calculs numériques

Pour le cas simple du circuit magnétique de la fig. 1 la façon de trouver le point de fonctionnement décrite par la fig. 3 b constitue une complication apparemment inutile. Ce cas simple aurait seulement l'avantage de présenter l'idée maitresse du modèle proposé et suggérer la façon de l'utiliser en relation avec un circuit magnétique donné.

D'habitude pour les circuits magnétique à géométrie compliquée, la caractéristique (2) de la fig. 3b, c'est-à-dire $H_e \cdot l_e = f(B)$ n'est pas connue.

Par conséquent la caractéristique globale (3) de la fig. 3 b reste elle aussi inconnue. La solution du problème de champ peut nous fournir des points discrets de ces caractéristiques. Il s'agit donc de construire un algorithme efficient pour trouver d'une maniere itérative le point de fonctionement aussi vite que précis. On va exposer l'algorithme le plus efficient, testé dans la pratique en liaison avec la méthode des éléments finis pour la résolution du problème de champ magnétique. L'algorithme a deux catégories d'itérations :

a) Des itérations (notées k) sur la perméabilité magnétique qui pour une force magnétomotrice θ^j donnée trouvent la perméabilité magnétique μ_m^k du matériel remplaçant l'aimant permanent. Le critère de sortie de ces itérations est la relation (5) :

$$(H_m l_m)^k = (H_e l_e)^k = \frac{1}{2}\theta^j$$

b) Dès que la relation (5) est satisfaite avec la précision admise, on démarre les itérations (notées j) sur la force magnétomotrice θ qui modifient la valeur de θ^i de sorte que l'induction finale dans l'aimant permanent soit celle qui correspond à la perméabilité μ_m^k au moment de l'abandon des itérations de type a).

La succession des étapes est :

a_0, b_0 — Démarrage du calcul (k = 0 ; j = 0) par la force magnétomotrice $\theta^\circ < 2H_{CM}l_m$ et la permeabilité initiale $\mu_m^0 > 0$, sans aucune autre restriction.

a_1 — Résolution du problème de champ magnétique dans la configuration réelle pour la force magnétomotrice θ^j. On va estimer chaque fois $(H_m l_m)^k$; $\left(\int_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{dl}\right)^k = (H_e l_e)$; B_m^k ; $(H_e l_e)_1^n =$

$$= \theta^j - (H_m l_m)^k.$$

Une solution du problème de champ doit nous conduire pour chaque valeur μ_m^k à l'égalité :

$$(H_e \cdot l_e)^k = (H_e l_e)_1^k \qquad (12)$$

a_2 — En supposant une variation „locale" linéaire de μ_m on va réévaluer la perméabilité magnétique du matériel qui remplace l'aimant permanent

$$\mu_m^{k+1} = \mu_m^k \cdot \frac{(H_e l_e)^k}{(H_m l_m)^k} \tag{13}$$

Avec la nouvelle valeur de μ_m on va reprendre les étapes a_1 et a_2 jusq'à ce que

$$(H_e l_e)^k = (H_m l_m)^k \tag{14}$$

avec une précision satisfaisante.

b_1 — Au moment de l'abandon des itérations sur la perméabilité, le matériel remplaçant l'aimant permanent a la perméabilité μ_m^k

e et l'induction magnétique B_m^k. Si la valeur de la force magnétomotrice θ^j était bonne, le point P^k était sur la caractéristique globale inconnue et l'induction magnétique etait B_T^k, celle qui correspondait à la perméabilité μ_m^k sur la caractéristique $\mu_m = f(B_m)$ tirée de la caractéristique $B - H$ de l'aimant permanent. Pour corriger une éventuelle différence entre B_T^k et B_m^k on va réévaluer la force magnétomotrice selon le schéma :

$$\theta^{j+1} = \theta^j \cdot \frac{B_T^k}{B_m^k} \tag{15}$$

L'abandon des itérations sur la force magnétomotrice (notées j) se fait dès que $B_T^k = B_m^k$ avec une précision satisfaisante. Sinon on va reprendre le calcul à partir de a_1. La figure 4 suggère le mécanisme de l'algorit-

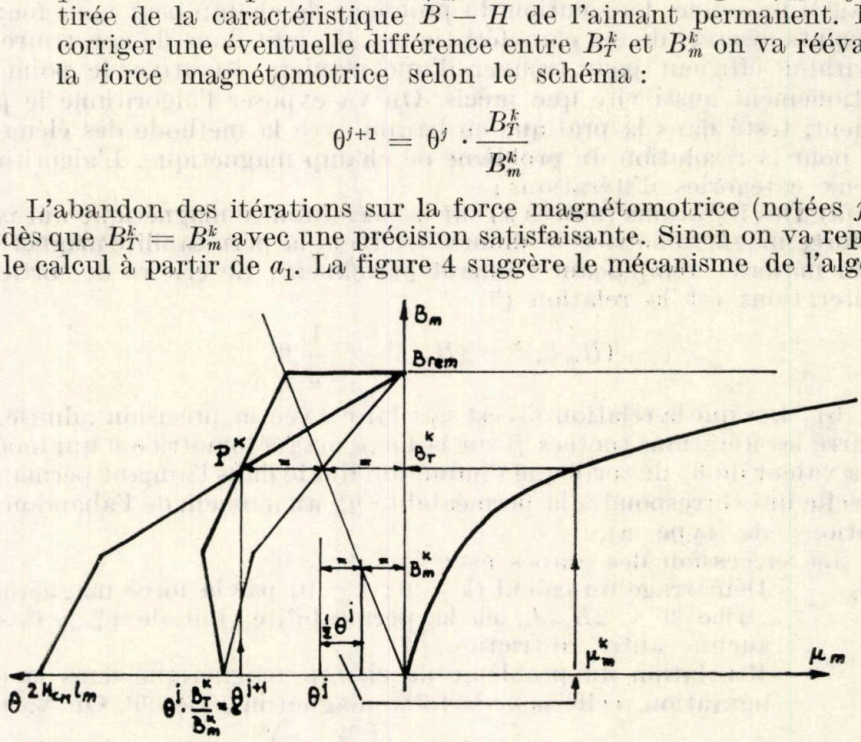


Fig. 4. Le mecanisme de l'algorithme proposé.

hme présenté ci-dessus. Pour le cas des caractéristiques $B - H$ façonnées par deux segments de droit (voire fig. 3) le nombre d'itérations sur la force magnétomotrice θ est réduit (2 a 3). Une saturation accusée du circuit augment le nombre d'itérations sur la perméabilité, mais içi la méthode de traiter la non-linearité du circuit extérieur a l'aimant exposée dans [12] peut sauver pas mal de temps de calcul.

Vu l'exposé antérieur et l'expérience de l'utilisation de la méthode proposée, on peut souligner les avantages de l'algorithme :

— les seules réstrictions portent sur les conditions initiales et ne posent pas de problémes dans les calculs numériques :

$$\theta^\circ < 2\ H_{CM}\ l_m \tag{16}$$

$$\mu_m^0 > 0 \tag{17}$$

— assure une bonne convergence pour les deux itérations imbriquées ;

— assure toutes les conditions pour la résolution correcte du problème de champ magnétique ;

— l'algorithme est indépendent de la méthode numérique de résolution du problème de champ magnétique engendré par des courants de conduction dans un millieu non-linéaire et non-isotrope.

4. Exemple d'application de la méthode

Le circuit magnétique de la fig. 1a a les dimensions suivants : $A_e = A_m = 10^{-3}$ m^2 ; $l_e = 4 \cdot 10^{-2}$m ; $\mu_0 = \mu_e$; $l_m = 0{,}1$ m. La caractéristique $B - H$ a été façonnée une fois par l'expression $H = H_{CM} \cdot \cos(\pi \cdot B/2B_{\text{rem}})$ avec $B_{\text{rem}} = 0{,}4$ T et $H_{CM} = 125$ kA/m et pour la deuxième fois de la manière exposée dans la fig. 3a, avec $B_{\text{coude}} = 0{,}1$ T et $H_{\text{coude}} = 120$=kA/m. On considère les fuites magnétiques du circuit négligeable.

On a obtenu les résultats suivants :

— par la méthode exposée dans [10], [11] et la fig. 2a, avec $J_0\, l_m = 31831$ A, l'induction magnétique dans le circuit est $B_m = 0{,}287$ T ;

— par la méthode proposée et la courbe $B-H$ façonnée par l'expression $H = H_{CM} \cdot \cos\,(\delta/2 \cdot B/B_{\text{rem}})$ les résultats sont présentés dans le tableau de ci-dessous ;

— par la méthode grapho-analytique „classique" l'induction B_m a les valeurs $B_m = 0{,}223$ T et $B_m = 0{,}236$ T selon la manière de façonner la courbe $B - H$.

θ^j [A]	μ_m^k/μ_0	B_m^k [T]	B_T^k [T]	$(H_e l_e)^k$ [A]	$(H_m l_m)^k$ [A]	k	j
5000	10	0.125663		4000	1000	0	0
5000	2.5	0.078539	0.235918	2500	2500	1	0
15019	2.5	0.235918	0.235918	7509	7509	0	1

La valeur exacte de l'induction magnétique dans ce cas est $B = 0.235902$ T.

— par la méthode proposée et la courbe $B-H$ façonnée de la manière présentée dans la fig. 3a. les résultats sont les suivants : La valeur exacte de l'induction magnétique dans ce cas est $B = 0.222745$ T

θ^j [A]	μ_m^k/μ_0	B_m^k [T]	B_T^k [T]	$(H_e l_e)^k$ [A]	$(H_m l_m)^k$ [A]	k	j
5000	10	0.125663	0.333627	4000	1000	0	0
5000	2.5	0.078539	0.222745	2500	2500	1	0
14180.4	2.5	0.222745	0.222745	7090	7090	0	1

5. Conclusions

Les résultats présentés ci-dessus ainsi que l'expérience de l'utilisation de l'algorithme poposé en liaison avec la méthode des elements finis nous permetent de formuler les conclusions suivantes:

— la convergence de l'algorithme est satisfaisante, même bonne;

— la modélisation de l'aimant permanent et l'algorithme de détermination du point de fonctionnement sont indépendants de la maniere de façonner la courbe B—H;

— la méthode proposée peut être utilisée en liaison avec les méthodes numériques de calcul du champ magnétique.

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. Răduti*, C. N. E. E'. 82 Timişoara vol. 4 p. 203—213
2. *Al. Fransua, I. F. Soran*, Electrotehnica 1984 Nr. 1
3. *J. Fischer, H. Moser*, Arch. f. El. vol. 42 No. 5 1956 p. 286—299
4. *A. Savini*, IEEE Trans. Mag. vol. Mag. 18 No. 2 1982 p. 552—557
5. *C. Mocanu*, Teoria cîmpului electromagnetic E. D. P. Bucureşti 1982
6. *H. Zijlstra*, Oxford Compumag p. 191—197
7. *G. F. T. Widger*, Proc IEE vol 116 No. 1 1969 p. 156—160
8. *S. J. Polak, A. Wachters*, Oxford Compumag p. 19—27
9. *M. M. Rădulescu, D. Stoia*, Proc. Int. Conf. on El. Mach. London, p. 212
10. *K. Reichert*, IEEE Trans Mag. vol Mag. 6, 1970 p. 283
11. *W. Kaminga*, J. Phys. D (Appl. Phys.) vol 8 1975 p. 841
12. *I. F. Soran*, These Timişoara 1979.

Modelarea magneţilor permanenţi pentru calcule numerice

Se propune un model de magnet permanent cu pînză de curent şi permeabilitate variabile, depinzînd de punctul de funcţionare. Fixarea punctului de funcţionare se face iterativ printr-un algoritm rapid convergent. Se dă un exemplu numeric de aplicare a algoritmului propus.

C.Z.: 531.7

MĂRIMEA FUNDAMENTALĂ IN ȘTIINȚELE TEHNICE

C. I. STAICU*

O singură mărime fundamentală în științele tehnice este necesară și suficientă în contextul condiției obligatorii de omogenitate dimensională a relațiilor fizice. Utilizarea practică a unei singure mărimi fundamentale este în concordanță cu metoda de stabilire a relațiilor fizice prin analiza dimensională generală elaborată de autor. Energia poate să fie unica mărime fundamentală în științele tehnice· Concepțiile filozofice si științifice actuale privind noua alianță natură — om exprimă prin energie unitatea realității înconjurătoare. Opinăm că energia ca mărime fundamentală oferă condiții optime de măsurare a parametrilor care descriu fenomenele fizice.

Introducere

Problema mărimilor (unităților de măsură) fundamentale este tratată și în prezent pe calea inițiată cu două secole în urmă, cînd s-au adoptat în 1793 etaloanele pentru metru și kilogram. Această cale a condus la constituirea a numeroase sisteme de unități de măsură, datorită alegerii lor arbitrare (ceea ce a generat multe dificultăți). În 1954 s-a stabilit Sistemul Internațional de unități de măsură. Se știe că generalizarea SI întîmpină mari dificultăți : obiective, datorate tradiției etc. Ne exprimăm opinia că problema mărimilor fundamentale trebuie reconsiderată în lumina cunoștințelor actuale privind alianța natură — om.

Omogenitatea relațiilor fizice

În natură se produc diverse fenomene fizice ; sediile lor sînt sistemele fizice naturale sau artificiale, acestea din urmă rezultînd din activitatea practică : omul înlănțuie și dirijează fenomenele fizice în mod creator astfel încît să rezulte efecte utile. Caracteristicile sistemului material care găzduiește un fenomen fizic oarecare, stările și transformările care au loc se scriu cu diverși parametri — mărimi fizice- cum ar fi : lungimea, viteza, forța, temperatura etc. Se dispune astăzi de peste 500 mărimi fizice ceea ce constituie o zestre apreciabilă ; ele au apărut treptat, iar lista lor este deschisă pentru noi mărimi, care pot să intervină ca rezultat al activității umane de aprofundare, amplificare și diversificare a cunoștințelor despre realitatea înconjurătoare.

* Dr. ing., ICEMENERG

Definirea mărimilor fizice a avut loc treptat, fiind corelată cu constituirea diverselor domenii ale științei; geometria, mecanica, electromagnetismul etc.; această situație conduce la clasificarea mărimilor fizice în *primare* și *secundare*; mărimile primare sînt intuitive, diversele lor proprietăți putîndu-se obține cu mare ușurință; astfel sînt: lungimea, timpul, temperatura etc.; numărul lor este relativ redus. Mărimile secundare se definesc apoi în funcție de mărimile primare.

Un fenomen fizic dat necesită un număr finit, mic de parametri descriptivi. O bară sprijinită la capete pe două reazime și acționată în centru de o forță concentrată, verticală se curbează în planul forței. Este desigurevident că **efectul este acela care este**, în speță, încovoierea s; aceasta depinde de lungimea barei l, forța care acționează F, caracteristica materialului dată de modulul de elasticitate W și secțiunea barei reprezentată prin momentul de inerție I. Mărimile l, F, W, I pot să varieze independent, iar s este variabila dependentă. Experimental se constată că săgeata barei s variază direct cu l și F, iar cu W și I variază invers. Descrierea făcută pînă aici este calitativă **și** satisface doar parțial dorința sau necesitatea de cunoaștere.

Urmează etapa cunoașterii cantitative care implică două elemente, și anume: corelația dintre parametrii descriptivi și cuantificarea (măsurarea) parametrilor (variabile independente și dependente). Este desigur evident că relația de calcul și măsurarea trebuie să conducă la aceeași valoare a variabilei dependente s.

Stabilirea relațiilor fizice trebuie să constate un scop prioritar; **la început este relația**: acesta este un dat al naturii și se urmărește să fie cunoscută de către om. Cuantificarea mărimilor intervine ulterior, fiind componentă a activității practice a omului. Alianța natură-om implică indubitabil succesiunea: relație-măsurare.

Operația de măsurare a mărimilor fizice constă în compararea lor cu un etalon de aceeași natură, care se constituie drept unitate de măsură. În principiu, orice mărime fizică ar putea să aibă unitate de măsură proprie aleasă arbitrar. Astăzi se consideră că este util ca numai un număr restrîns de unități de măsură să fie arbitrare; acestea se denumesc fundamentale, iar între ele nu există legături de nici un fel. Pe baza lor se definesc apoi restul unităților de măsură, denumite derivate. Distingerea a două feluri de unități de măsură conduce implicit la o nouă clasificare a mărimilor fizice în *fundamentale* și *derivate*.

Orice relație fizică trebuie sine qua non să respecte condiția de omogenitate dimensională, termenii ei trebuind să aibă aceeași natură (mărimi fundamentale sau unități de măsură); această problemă a fost rezolvată definitiv de Fourier (1763—1830); nu poate să existe egalitate între metri și temperatură! Bertrand (1822—1900) a arătat că pe baza condiției de omogenitate dimensională se pot stabili relații fizice corecte, dacă se cunoaște lista parametrilor descriptivi. Pentru exemplul prezentat mai sus, după Bertrand și Rayleigh (1842—1919) se poate scrie

$$s = \Sigma k_i l^{a_i} F^{b_i} W^{c_i} I^{d_i}, \tag{1}$$

iar în contextul omogenității dimensionale este necesar ca

$$[s] = [l^a F^b W^c I^d]. \tag{2}$$

Speciile mărimilor fizice din (2) sînt diferite; geometrice (l, I, s) și mecanice (F, W). Pentru ca termenii (2) să satisfacă condiția de a avea aceeași natură este necesar ca mărimile respective să fie exprimate prin ecuații dimensionale adecvate; se știe că astăzi se folosește în acest scop SI avînd ca mărimi fundamentale lungimea L, masa M și timpul T (pentru geometrie și mecanică); pe baza lor $[s, l] = L$; $[F] = LMT^{-2}$; $[W] = L^{-1}MT^{-2}$; $[I] = L^4$.

Se ia în considerare faptul că mărimile care descriu un fenomen fizic dat sînt de diverse specii, iar relația dintre mărimi trebuie să fie, în mod obligatoriu, omogenă dimensional; ca urmare, ne exprimăm opinia că acestea sînt motivele pentru care mărimile fizice trebuie să aibă ecuații dimensionale proprii (nu din considerente de măsurare):

Omogenitatea relațiilor implică ecuațiile dimensionale. Pe de altă parte, este desigur evident că pentru realizarea omogenității dimensionale (verificarea omogenității unei relații cunoscute sau stabilirea unei relații noi omogene) **este necesară și suficientă o singură mărime fundamentală**; pe baza unui singur element de omogenitate, se poate constata dacă natura a doi termeni dintr-o relație dată, este aceeași; trebuie totodată ca valoarea exponentului de dimensiune să fie, de asemenea, aceeași.

Reducerea numărului mărimilor fundamentale

În prezent este generalizat în fizică Sistemul Internațional de unități de măsură constituit din șapte mărimi fundamentale, care se prezintă în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Mărimea fundamentală	Simbol	Unitatea de măsură	Simbol
1	Lungime	L	metru	m
2	Masă	M	kilogram	kg
3	Timp	T	secundă	s
4	Intensitate a curentului electric	I	amper	A
5	Temperatură termodinamică	θ	kelvin	K
6	Cantitate de substanță	Q	mol	mol
7	Intensitate luminoasă	J	candelă	cd

Primele două mărimi fundamentale, lungimea L și timpul T (în ordinea introducerii în fizică) sînt totodată mărimi primare, ele impunîndu-se intuiției noastre din primul moment al contactului cu realitatea înconjurătoare. Este posibil însă ca și celelalte cinci mărimi fundamentale M, I, θ, Q, J ale Sistemului Internațional să fie exprimate în funcție numai de lungime și timp.

În mecanică, mărimea fundamentală este *masa* M. Ca mărime fizică, masa este definită prin legea fundamentală a dinamicii stabilită de Newton (1642—1727), fiind citul dintre forța F și accelerația a, adică $m = \frac{F}{a}$. În acest caz, legea atracției universale, stabilită tot de Newton, trebuie scrisă sub forma $F = k \frac{m_1 m_2}{d^2}$ în care m reprezintă două mase, iar d distanța dintre ele. Această relație conține factorul k; el este o constantă universală și are o valoare care depinde, univoc, de mărimile arbitrare ale unităților de măsură fundamentale. Dacă legea atracției universale se scrie sub forma $F = \frac{m_1 m_2}{d^2}$, unitățile de măsură fundamentale nu mai pot fi arbitrare; valorile lor trebuie stabilite astfel încît să conducă la $k = 1$. În aceste condiții, masa nu mai trebuie să fie considerată mărime fundamentală, deoarece se definește pe baza mărimilor fundamentale de lungime și timp, adică

$$[m] = \frac{[Fd^2]}{[m]} = L^3 T^{-2}. \tag{3}$$

Unitatea de măsură a masei este derivată și se calculează deci din unitățile alese arbitrar pentru lungime și timp; acesta este sistemul astronomic de unități de măsură, avînd numai două mărimi fundamentale.

În domeniul electromagnetismului, mărimea fundamentală este *intensitatea curentului electric* I. Amperul, ca unitate SI pentru intensitatea curentului electric, este definit astfel: intensitatea curentului electric constant care menținut în două conductoare paralele, rectilinii, de lungime infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezate în vid, la distanța de 1 metru unul de altul, ar produce între acestea, pe lungimea de 1 metru, o forță egală cu $2 \cdot 10^{-7}$ N. Rezultă deci că se poate scrie

$$[I] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{LMT^{-2}}{L} = MT^{-2} = L^3 T^{-4} \tag{4}$$

unde s-a ținut seama și de (3).

În domeniul fenomenelor termice, mărimea fundamentală este *temperatura termodinamică* θ, iar unitatea de măsură este kelvinul K, definit ca fracțiunea 1/273,16 din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei. Se ia în considerare ecuația de stare a gazelor ideale (perfecte) $PV = R\theta$ scrisă pentru un mol de gaz; simbolurile au semnificația obișnuită. Se pot adopta unități de măsură convenabile care să conducă la o valoare unitară $R = 1$ pentru constanta universală a gazelor; în această situație rezultă că

$$[\theta] = [PV] = \frac{LMT^{-2}}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = L^2 T^{-2}; \tag{5}$$

ecuația dimensională a temperaturii are în acest caz forma patratului vitezei.

Cantitatea de substanță Q este mărimea fundamentală în chimia fizică și fizica moleculară. Unitatea de măsură corespunzătoare este molul care se definește astfel : cantitatea de substanță a unui sistem care conține un număr de unități elementare (atomi, molecule, ioni, electroni etc.) egal cu numărul atomilor existenți în 0,012 kilograme de carbon 12. Oricare altă substanță conține acest număr de atomi într-un număr diferit de kilograme din substanța respectivă. Deoarece există o corespondență biunivocă între valorile care exprimă masa în kilograme și numărul de moli, rezultă că de fapt

$$[Q] = M = L^3 T^{-2} \tag{6}$$

în care s-a ținut din nou seama de (3).

În ecuațiile dimensionale ale mărimilor caracteristice fotometriei intervine *intensitatea luminoasă* J ca mărime fundamentală. Intensitatea luminoasă a unui izvor de lumină punctiform, într-o direcție dată, este raportul dintre fluxul luminos emis într-un unghi solid elementar din jurul direcției considerate și unghiul solid respectiv. Mărimea fizică corespunzătoare intensității luminoase este intensitatea radiantă de izvor. Ecuația dimensională a intensității radiante de izvor este cea a fluxului radiant, întrucît unghiul solid nu are ecuația dimensională.
Ca urmare

$$[J] = \frac{[E]}{[t]} = L^2 M T^{-3} = L^5 \ T^{-5} \tag{7}$$

în care s-a luat în considerare și relația (3) de mai sus.

Este posibil să se meargă mai departe* cu reducerea numărului mărimilor fundamentale; în acest scop este necesar să se ia în considerare o relație dintre lungime și timp care să fie/conțină o constantă universală. Se știe că viteza luminii în vid c este o constantă universală. Se poate adopta viteza lumnii în vid ca unitate de măsură pentru viteză; astfel, se poate menține secunda ca unitate de măsură fundamentală pentru timp, iar $3 \cdot 10^5$ km se ia ca unitate de măsură pentru lungime, devenind unitate de măsură derivată; ca urmare, se poate scrie

$$[L] = T. \tag{8}$$

Se face precizarea că alegerea constantelor universale care să devină unitare prin adoptarea potrivită a unităților de măsură este reglementată numai prin condiții de simplitate și comoditate.

* * *

Problema ca spațiul L sau timpul T să fie preferat și reținut drept mărime fundamentală reflectă alianța natură-om. Spațiul este una dintre

---

* Se menționează că este posibil să fie eliminate toate unitățile de măsură fundamentale. În acest scop, Planck, de exempli, a atribuit o valoare unitară constantei care-i poartă numele. Hartree și Rouarc au procedat în mod similar, atribuind valori unitare altor constante universale. Asemenea sisteme de unități de măsură nu au vreo utilitate practică; se fac speculații teoretice care atestă însă aspectul arbitrar al alegerii unităților de măsură fundamentale

formele de existență ale materiei; el exprimă ordinea coexistenței corpurilor, mărimea, forma, întinderea lor. În mecanica clasică, spațiul este considerat un continuu tridimensional infinit omogen și izotrop, descris de geometria euclidiană. Timpul este, de asemenea una dintre formele de existență a materiei, care exprimă succesiunea și simultaneitatea proceselor realității obiective. În mecanica clasică, timpul este considerat un continuu unidimensional a cărui măsurare este independentă de procesele fizice și sistemul de referință. După teoria relativității, spațiul este legat organic de timp și depinde de materia în mișcare; spațiul și timpul formează un continuu cuadridimensional, pseudoeuclidian în relativitatea restrînsă și pseudorimannian în relativitatea generală. După Einstein (1879—1955) există o legătură indisolubilă între materie, spațiu și timp. Întrucît masa este o caracteristică a materiei, se poate spune că legătura indisolubilă este între masă, spațiu și timp, adică între materie și mișcare. În teoria relativității restrînse, Einstein echivalează masa cu energia corpului în repaus, scriind relația $E = mc^2$.

În baza celor de mai sus opinăm că **energia este mărimea fundamentală unică.** Ecuațiile dimensionale ale unor mărimi fizice, avînd energia E drept unica mărime fundamentală, se prezintă în tabelul 2; el poate fi

Tabelul 2

Mărimea	Simbol	Ecuație dimensională		Se tratează ca
		SI	E	
Lungimea	l	L	E	
Timpul	t	T	E	
Masa	m	M	E	
Forța	F	LMT^{-2}	—	$m \cdot a$
Modulul de elasticitate	W	$L^{-1}MT^{-2}$	E^{-2}	
Momentul de inerție	I	L^4	E^4	
Energia	E	L^2MT^{-2}	E	
Puterea	P	L^2MT^{-3}	—	$E:t$
Rezistența electrică	R	$L^2M^{-1}T$	E^2	
Intensitatea curentului electric	I	MT^{-2}	E^{-1}	
Temperatura termodinamică	θ	L^2T^{-2}	—	$1^2:t^2$
Fluxul de căldură	q	L^2MT^{-3}	—	$1^5:t^5$
Conductibilitatea termică	λ	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	E^{-1}	
Vîscozitatea dinamică	μ	$L^{-1}MT^{-1}$	E^{-1}	
Densitatea	ρ	$L^{-3}M$	E^{-2}	

completat cu toate mărimile fizice; pentru întocmirea tabelului se are în vedere că în contextul celor prezentate aici $[E] = L$.

Utilitatea mărimii fundamentale unice

Una dintre aplicațiile principale ale mărimilor fundamentale este verificarea omogenității termenilor din relațiile fizice. În cazul barei supuse la încovoiere, prezentat mai sus, relația cunoscută și tabelul 2 conduc la

$$[s] = \frac{[Fl^3]}{[WI]} = E = \frac{E^3}{E^{-2}E^4}; \tag{9}$$

rezultă imediat din ultima egalitate omogenitatea termenilor.

În cazul relației din electrodinamică $E = RI^2t$, omogenitatea termenilor rezultă cu ușurință pe baza ecuațiilor dimensionale respective din tabelul 2; astfel

$$[E] = [RI^2t] = E = E^2E^{-2}E; \tag{10}$$

corectitudinea ultimei egalități este desigur evidentă.

În transferul de căldură există importanta lege privind conductibilitatea termică, stabilită de Fourier; omogenitatea termenilor se prezintă după cum urmează

$$[q] = \left[\lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} S^2\right] = \frac{E^{-1}E^2}{E}; \tag{11}$$

rezultatul este în concordanță cu tabelul 2, conform căruia temperatura termodinamică și fluxul de căldură nu au ecuații dimensionale în E.

Folosirea condiției de omogenitate dimensională — în contextul afirmației lui Bertrand — la stabilirea de relații fizice noi constituie obiectul analizei dimensionale. În forma clasică a acestei metode — analiza dimensională restrînsă — sistemele de ecuații algebrice, liniare între exponenții de dimensiune (cunoscuți) și exponenții de mărime (necunoscuți) — care exprimă omogenitatea dimensională — sînt nedeterminate în marea majoritate a cazurilor din practică: setul de mărimi care descriu un fenomen fizic dat este mai mare decît numărul mărimilor fundamentale ale SI (sau oricare alt sistem de unități de măsură); ca urmare, analiza dimensională clasică conduce numai rareori la relații fizice între mărimi, cel mai adesea conducînd la relații între invarianți (mărimi adimensionale). În analiza dimensională generală, elaborată de autor ca noutate mondială, acest impas este eliminat; necunoscutele din ecuațiile diofantice care exprimă omogenitatea dimensională admit valori pozitive, întregi, minime.

Metoda de analiză dimensională generală conduce la rezultate corecte și în cazul unei singure mărimi fundamentale. Astfel, de exemplu, viteza de cădere a unei bile grele într-un mediu vîscos este dată de relația

$$v^a\mu^b = k\, g^c r^d \rho^e \tag{12}$$

în care simbolurile noi reprezintă vîscozitatea dinamică a fluidului μ și diferența densităților ρ. Pe baza tabelului 2 se scrie relația dimensională

sub forma

$$\left(\frac{E}{E}\right)^a (E^{-1})^b = (E^{-1})^c\ (E)^d\ (E^{-2})^e; \tag{13}$$

deoarece viteza nu are ecuaţie dimensională în E, s-a introdus sub forma raportului dintre lungime şi timp, pentru a nu fi eliminată din ecuaţia care exprimă condiţia de omogenitate dimensională şi nici din relaţia care descrie fenomenul fizic. Din (13) rezultă ecuaţia

$$a + c + 2e = a + b + d; \tag{14}$$

ea admite două soluţii cu valori pozitive, întregi, minime care se prezintă în tabelul 3.

Tabelul 3

a	b	c	d	e
1	1	1	2	1
1	2	1	1	1

Pe baza — teoretic — a două seturi de date experimentale rezultă că factorul numeric adimensional se menţine constant — aşa cum trebuie să fie în relaţiile fizice — pentru soluţia de pe linia întîi; ca urmare

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{\mathrm{gr}^2 \rho}{\mu}, \tag{15}$$

obţinîndu-se deci relaţia cunoscută din fizică.

Consideraţii finale

Punctul de vedere pentru care optăm în problema mărimilor fundamentale are la bază triada : fenomen fizic — parametri descriptivi — relaţie fizică omogenă dimensional; ea aparţine naturii, care se constituie drept element primar. Pentru realizarea condiţiei obligatorii de *omogenitate dimensională a relaţiilor fizice* este necesară şi suficientă o singură mărime fundamentală. Stabilirea de relaţii noi pe baza condiţiei de omogenitate, este posibilă chiar cînd se foloseşte o singură mărime fundamentală, dacă se aplică analiza dimensională generală.

Energia — sau altă mărime fizică — poate să fie adoptată drept mărime fundamentală. Energia este însă mărirea care stă la baza concepţiilor filozofice şi ştiinţifice acceptate în prezent; prin ea se exprimă *unitatea naturii*. Opţiunea noastră privind energia ca mărime fundamentală exprimă forma actuală a alianţei natură-om.

Cuantificarea (măsurarea) mărimilor fizice este acţiunea omului, care se constituie drept al doilea element; operaţia de măsurare a para-

metrilor care descriu natura este justificată de dorința cunoașterii sau de necesitățile practice. Este desigur evident că în această acțiune a spiritului uman trebuie să se ia în considerare factorii componenți ai realității înconjurătoare. Ne exprimăm opinia că energia ca mărime fundamentală oferă condiții optime de efectuare a măsurărilor, iar valorile care se obțin pot să fie cel mai aproape de realitate; aceste probleme trebuie analizate prin studii de detaliu, luîndu-se în considerare speciile de mărimi fizice. Se întrevăd simplificări în legătură cu *unitățile de măsură*.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Grigorovici, M. Oncescu*, Mărimi și unități în fizică. Editura Tehnică, București, 1958.
2. *I. Iscrulescu, Gh., Ispășoiu, V. Petrescu*, Sistemul Internațional de unități de măsură Editura Tehnică, București, 1970.
3. *M. Oncescu*, Mărimi și unități în fizică. Editura Tehnică, București, 1955.
137 année, 1948.
4. *R. Saint Guilhem*, Sisteme de unități și analiză dimensională, Annales des Mines, 137° année, 1948
5. x x x Sistemul Internațional de unități (traducere din limba franceză). Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
6. *Louis de Broglie*, Certitudinile și incertitudinile științei. Editura Politică, București, 1980.
7. *M. Bunge*, Știință și filozofie. Editura Politică, București, 1984.
8. *M. E. Omeleanovski*, Dialectica în fizica modernă. Editura Politică, București. 1982.
9. *I. Prigogine, I. Stengers*, Noua alianță. Editura Politică, București. 1984.
10. x x x Probleme de filozofie a științei. Revista Forum, IV, 4, 1972.
11. *C. I. Staicu* Studii și cercetări de fizică, V, 3—4, 1954.
12. *C. I. Staicu*, Metrologia Aplicată, III, 4, 1956.
13. *C. I. Staicu*, Buletinul Institutului Politehnic București, XXX, 2, 1968.
14. *C. I. Staicu*, Buletinul Institutului Poitehnic din Iași, XVI (XX), 3—4, 1970.
15. *C. I. Staicu*, Journal of the Franklin Institue, CCLXXXXII, 6, 1971.
16. *C. I. Staicu*, Analiza dimensională generală. Editura Tehniă, București, 1976.
17. *C. I. Staicu*, Reprezentarea datelor măsurărilor prin formule cu analiza dimensională generală, Sesiunea de comunicări științifice a Academiei R.S.R, București, 1977.
18. *C. I. Staicu*, Calculator electronic pentru stabilirea relațiilor fizice monom, omogene dimensional — Brevet de invenție nr. 77249, RSR, 1978.
19. *C. I. Staicu*, Expérimentation et traitement des données par analyse dimensionnelle générale 7e Symposium international de l'AIRH, Toulouse, 1980.
20. *C. I. Staicu*, Processus économique pour la connaissance expérimentale en physique, Al XVI-lea Congres internațional de istoria științei, București, 1981.
21. *C. I. Staicu*, Restricted and General Dimensional Analysis. Editura Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1982.

The Fundamental Physical Quantity in Technical Sciences

A single fundamental physical quantity is necessar and sufficient in technical sciences in the context of the compulsory dimensional homogeneity of the physical relations. The practical use of a single fundamental physical quantity is in concordance with the method to establish the physical relations by the general dimensional analysis elaborated by the author. The energy can be the only fundamental physical quantity in technical science. The present philosophical and scientific concepts regarding the new alliance nature-man expresses the unity of the surrounding reality by energy. We opinate that the energy as a fundamental physical quantity offers optimal measurement conditions of the parameters which describe physical phenomena.

C. Z. : 621. 313. 333

MICROMOTORUL ASINCRON MONOFAZAT CU MIEZUL FEROMAGNETIC STATORIC ASIMETRIC — METODICA DE CALCUL A CARACTERISTICII MECANICE

A. I. DEGUTIS, P. I. KOSTRAUSKAS*

În lucrare se prezintă un model matematic al cimpului magnetic din intrefierul unui micromotor monofazat cu stator asimetric tip ADA. Cu ajutorul acestui model se calculează caracteristica mecanică a micromotorului ; rezultatele se compară cu măsurători experimentale.

1. Introducere

Micromotorul de tip ADA este un micromotor asincron monofazat cu poli aparenți și are miezul feromagnetic al statorului asimetric. În figura 1 se prezintă o secțiune transversală a micromotorului ADA bipolar.

Statorul (1) este format în miezul feromagnetic realizat din tole de tablă și are polii principali (3) echipați cu înfășurarea primară, formată

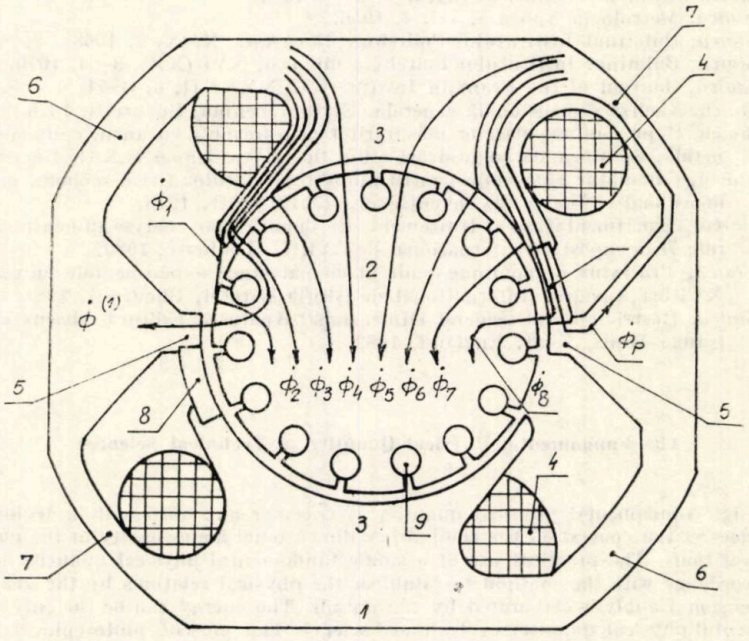


Fig. 1. Explicativă pentru distribuția fluxurilor magnetice în micromotorul ADA.

* Colaborator științific, dr. ing ; Prof. dr. ing. RSS Lituaniană, Institutul Politehnic Kaunas

din două bobine concentrice (4); în stator se mai află și polii auxiliari (5); miezul feromagnetic al statorului are jugul de grosime mare (6), respectiv îngust (7) și șunturile magnetice detașabile (8). Rotorul micromotorului (2) conține o înfășurare în colivie din aluminiu (9).

Cuplul motor al micromotorului se produce ca urmare a construcției asimetrice a miezului feromagnetic al statorului [6]. Fluxul magnetic $\Phi^{(1)}$ se închide prin jugul nesaturat. Fie A_1, un punct pe caracteristica de funcționare a miezului (fig. 2). Fluxul magnetic principal se închide în parte și prin porțiunea de circuit magnetic cu jug foarte saturat: fie A_2 un punct de funcționare al acestui circuit (fig. 2).

Defazajul fluxurilor magnetice — principal și $\Phi^{(1)}$ — se notează cu $\Delta\theta$. Aceste fluxuri magnetice din întrefier sînt defazate în timp și decalate în spațiu obținîndu-se un cîmp magnetic învîrtitor eliptic care produce cuplul electromagnetic.

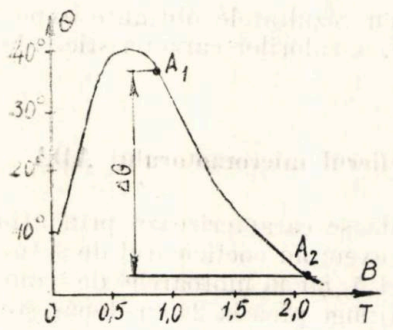


Fig. 2. Explicativă pentru principiul de funcționare a micromotorului ADA

În ceea ce privește simplitatea constructivă, aceste micromotoare n-au alte soluții analoage de comparat care să asigure asemenea posibilități în mecanizarea și automatizarea procesului de fabricație. Aceste motoare se disting în raport cu alte tipuri de micromotoare asincrone monofazate cu poli aparenți prin prețul de cost redus, randamentul relativ ridicat și siguranța lor în funcționare.

Din tabelul 1 rezultă că micromotoarele de tip ADA pot fi utilizate la aparatele cu condiții de pornire ușoare, cum sînt ventilatoarele de masă și perete, storcătoare de fructe, diaproiectoare, uscătoare de păr și mîini, instalații de climatizare, mașini de spălat rufe, etc.

Tabelul 1

Parametrii micromotoarelor ADA

Parametru	ADA—1,0	ADA —2,5	ADA—6,0	ADA—16,0	ADA—25,0	ADA—60,0
U_1 [V]	220	220	220	220	220	220
P_2 [W]	1,0	2,5	6,0	16,0	25,0	60,0
n_1 [rot/min]	2400	2500	2500	2500	2500	2750
I_1 [A]	0,110	0,170	0,370	0,790	1,20	2,00
η [%]	8	13	16	19	22	32
M [kg]	0,31	0,47	0,68	1,32	1,62	3,20
M_p/M_n	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6
M_m/M_n	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0

Unul dintre obiectivele cele mai importante ale teoriei motorului prevede elaborarea unei metodici de calcul automatizat al caracteristicii mecanice pe baza analizei distribuției cîmpului magnetic în întrefier, adică

eliminînd etapa de determinare a curenților pentru fiecare valoare a alunecării. Pentru realizarea acestui obiectiv trebuie să se rezolve următoarele probleme :

1) precizarea modelului matematic al cîmpului magnetic din întrefier prin ridicarea preciziei de descriere analitică a distribuției fluxurilor în micromotor ;

2) determinarea dependenței dintre alunecarea critică a caracteristicii mecanice și parametrii micromotorului ;

3) elaborarea algoritmilor pentru calculul parametrilor cîmpului magnetic din întrefier în dependență de starea magnetică a jugului micromotorului și a parametrilor înfășurărilor statorului și rotorului în regim de scurtcircuit, pentru determinarea alunecării în funcție de parametrii schemei echivalente și pentru calculul caracteristicii mecanice ;

4) elaborarea programului pentru calculul caracteristicii mecanice a micromotorului ;

5) compararea rezultatelor calculate cu rezultatele obținute experimental, a parametrilor cîmpului magnetic, a valorilor caracteristice ale alunecării și a caracteristicii mecanice.

2. Calculul cîmpului magnetic în întrefierul micromotorului ADA

Mașinile asincrone în fabricația actuală se caracterizează prin utilizarea superioară a materialelor active. De exemplu coeficientul de saturație pentru miezul feromagnetic depășește 1,5, iar la motoarele de construcție specială valoarea acestui coeficient ajunge pînă la 2 sau depășește această valoare. Ca urmare a distribuției neuniforme a fluxurilor magnetice în stator și rotor, miezul feromagnetic nu mai este liniar. Caracteristica magnetică a miezului este neliniară și se produc armonici de spațiu și de timp în curba tensiunii magnetice. Datorită prezenței armonicilor superioare spațiale curba cîmpului magnetic în întrefier variază în timp, adică

$$B(x, t_1) ; B(x, t_2) = \text{var}. \quad (1)$$

Curbele din fig. 3 se descompun în serii Fourier proprii diferite între ele.

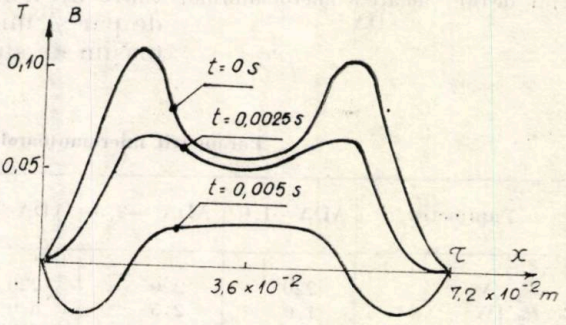


Fig. 3. Curbele de repartiție a inducției în întrefierul micromotorului asincron monofazat la momente diferite.

Pentru descrierea cîmpului magnetic plan paralel din întrefierul mașinii asincrone se folosește ecuația următoare [4] :

$$\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\nu \cdot \pi}{\omega \cdot \sigma}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Cu condițiile de frontieră corespunzătoare, ecuația (2) are soluția următoare [4]:

$$B_d(x,\ t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{d\nu} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{d\nu}) \cdot \sin \nu \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot x, \tag{3}$$

$$B_q(x,\ t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{q\nu} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{q\nu}) \cdot \cos \nu \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot x, \tag{4}$$

unde amplitudinile $B_{d\nu}$, $B_{q\nu}$ și defazajele $\varphi_{d\nu}$ și $\varphi_{q\nu}$ ale armonicilor ν se determină cu ajutorul seriei Fourier din două curbe de inducție din întrefier $B(x, 0)$ și $B(x, T/4)$, corespunzătoare momentelor de timp $t = 0$ și $t = T/4$, unde T — perioada de variație a inducției magnetice. Pentru descrierea analitică a curbelor $B(x, 0)$ și $B(x, T/4)$ s-a stabilit modelul matematic al cîmpului magnetic din întrefierul micromotorului ADA, pentru care se pot scrie următoarele ecuații:

$$\begin{cases}
\left[\underline{Z}_{\mu 1} + j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k)} + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)}\right] \cdot \dot{\Phi}_1 + j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \times \\
\times \frac{\underline{Z}_b}{(\underline{Z}_b + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}_2 + j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k-2)} + \underline{Z}^{(3)} + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\underline{Z}^{(2)}}{(\underline{Z}_b + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \times \\
\times \dot{\Phi}_3 + \ldots + j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot \underline{Z}_b + \underline{Z}^{(k)} + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\underline{Z}^{(k-1)}}{(\underline{Z}_b + \underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}_k - \\
- j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}_b + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{(\underline{Z}_i + \underline{Z}^{(k-1)})}{(\underline{Z}^{(k-1)} \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}^{(1)} = \dot{F}, \\
j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k)} + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\underline{Z}_b}{(\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}_1 + \\
+ \left[\underline{Z}_{\mu 2} + j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)}\right] \cdot \dot{\Phi}_2 + \\
+ j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k-2)} + \underline{Z}^{(3)} + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\underline{Z}_b}{(\underline{Z}_b + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}_3 + \cdots + j \times \\
\times \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}_b + \underline{Z}^{(k)} + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\underline{Z}^{(k-2)}}{(\underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}^{(k-2)} + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}_k + \\
+ j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}_b + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{(\underline{Z}_b + \underline{Z}_i)}{(\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}^{(2)} + Z_i)} \cdot \dot{\Phi}^{(1)} = \dot{F}, \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
- j \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}^{(k)} + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{(\underline{Z}_i + \underline{Z}^{(k-1)})}{(\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi} + j \cdot \\
\cdot \frac{\omega}{\sqrt{2} \cdot (\underline{Z}_b + \underline{Z}_b + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{\omega}{(\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \cdot \frac{(\underline{Z}_b + \underline{Z}_i)}{(\underline{Z}^{(k-1)} + \underline{Z}^{(2)} + \underline{Z}_i)} \cdot \dot{\Phi}^2 +
\end{cases}$$

$$\begin{cases} +j\cdot\dfrac{\omega}{\sqrt{2}\cdot(\underline{Z}^{(2)}+\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)}\cdot\dfrac{(\underline{Z}_b\cdot(\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)-\underline{Z}^{(2)}\cdot(\underline{Z}^{(2)}+\underline{Z}_i)]}{(\underline{Z}^{(2)}+\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)\cdot(\underline{Z}^{(k-2)}+\underline{Z}^{(3)}+\underline{Z}_i)}\cdot\dot{\Phi}_3+\ldots+ \\ +j\cdot\dfrac{\omega}{\sqrt{2}(\underline{Z}^{(k-1)}+\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)}\cdot\dfrac{[\underline{Z}^{(k-2)}\cdot(\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)-\underline{Z}^{(k-1)}\cdot(\underline{Z}^{(2)}+\underline{Z}_i)]}{(\underline{Z}^{(2)}+\underline{Z}^{(k-2)}+\underline{Z}_i)\cdot(\underline{Z}_b+\underline{Z}^{(k)}+\underline{Z}_i)}\cdot\dot{\Phi}_k+ \\ +\left\{\underline{Z}_{\mu}^{(1)}+j\cdot\dfrac{\omega}{\sqrt{2}}\left[\underline{Z}_b+\dfrac{(\underline{Z}_b+\underline{Z}_i)\cdot(\underline{Z}_i+\underline{Z}^{(k-2)})}{Z_b+2\cdot\underline{Z}_i+\underline{Z}^{(k-2)}}\right]\right\}\cdot\dot{\Phi}^{(1)}=\dot{F}, \\ (\underline{Z}'_{\delta p}+\underline{Z}''_{\delta p}+\underline{Z}'_p+\underline{Z}''_p+\underline{Z}_{pp}+\underline{Z}_{si}+\underline{Z}_{jp}+\underline{Z}_{pa})\cdot\dot{\Phi}_p=\dot{F}. \end{cases}$$

Impedanţele barei Z_b, inelului $\underline{Z}_i$, ale coliviei rotorice $\underline{Z}^{(2)}$, $\underline{Z}^{(3)},\ldots,\underline{Z}^{(k)}$ şi reluctanţele $\underline{Z}'_{\delta p}$, $\underline{Z}''_{\delta p}$, $\underline{Z}'_p$, $\underline{Z}''_p$, $\underline{Z}_{pp}$, $\underline{Z}_{si}$, $\underline{Z}_{jp}$, $\underline{Z}_{pa}$ ale miezului micromotorului se determină după metodica prezentată în [3], unde s-a notat cu k indicele fluxurilor; $\dot{F}$ reprezintă solenaţia înfăşurării primare. Sistemul de ecuaţii (5) scris în complex se rezolvă prin metoda iteraţiei utilizînd caracteristicile de magnetizare (în complex) ale materialelor feromagnetice ale micromotorului ADA.

3. Determinarea alunecării critice la cîmpul magnetic circular în întrefierul maşinii asincrone monofazate

Pentru calculul alunecării critice s'_m la cîmpul magnetic pulsator în întrefierul maşinii asincrone monofazate au fost deduse ecuaţiile următoare :

$$K'_0\cdot s_m^{*6}+k'_1\cdot s_m+k'_2\cdot s_m^{*2}+k'_3=0, \tag{6}$$

$$s'_m=s_m^*+1 \tag{7}$$

La calculul caracteristicii mecanice a micromotorului asincron monofazat este necesară alunecarea critică s_m determinată la motorul cu cîmp magnetic circular în întrefier; aceasta se determină din ecuaţia următoare :

$$a_0\cdot s_m^6+a_1\cdot s_m^4+a_2\cdot s_m^2+a_3=0. \tag{8}$$

Coeficienţii k'_0, k'_1, k'_2, k'_3, a_0, a_1, a_2, a_3 se calculează după metodica expusă în [3].

Caracteristica mecanică a maşinii asincrone monofazate la cîmpul magnetic pulsator este o curbă simetrică în raport cu punctul de funcţionare în scurtcircuit şi prezintă 4 puncte extreme. Ecuaţia (6) este de gradul 6 şi permite determinarea tuturor punctelor extreme ale caracteristicii mecanice în funcţie de parametrii schemelor echivalente la funcţionarea în sarcină oarecare.

4. Calculul caracteristicii mecanice a micromotorului ADA.

La proiectarea şi exploatarea micromotorului în diferitele acţionări trebuie să cunoaştem forma caracteristicii mecanice şi parametrii carac-

teristicii : cuplul de pornire, cuplul maxim, alunecarea critică, alunecarea în gol și alunecarea în funcție de scădere a cuplului. Acești parametri ai caracteristicii mecanice se pot determina în faza de proiectare a micromotorului dacă la calculul caracteristicii mecanice s-a obținut o precizie suficientă.

Formula pentru calculul cuplului electromagnetic rezultant care acționează la arborele micromotorului ADA este :

$$M_{ref} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \cdot \left[\frac{1}{s_{m\nu}} + (1 + \beta_\nu) \cdot s_{m\nu} \right] \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{+ B_\nu^2}{\frac{s_\nu}{s_{m\nu}} + \frac{s_{m\nu}}{s_\nu} + \beta_\nu \cdot s_{m\nu}} - \frac{- B_\nu^2}{\frac{2 - s_\nu}{s_{m\nu}} + \frac{s_{m\nu}}{2 - s_\nu} + \beta_\nu \cdot s_{m\nu}} \right), \tag{9}$$

$$s_\nu = 1 \pm (1 - s_1) \cdot \nu, \tag{10}$$

Inducțiile $^{+}B_\nu$ și $^{-}B_\nu$ se determină din soluția modelului matematic al cîmpului magnetic din întrefier (5) după metodica expusă în [4]. Dimensiunile A_ν, $s_{m\nu}$, β_ν, se determină după metodicile expuse în [3, 4].

5. Programul de calcul și rezultatele de calcul și cercetare experimentală pentru determinarea caracteristicii mecanice a micromotorului ADA

Programul de calcul al caracteristicii mecanice a fost scris în limbajul FORTRAN — IV. Programul se compune din partea principală și 11 subrutine. Pentru rularea programului este necesară o memorie de 72 Ko pînă la 90 Ko în funcție de calculatorul folosit. Așa după cum reiese din organigramă (fig. 4) la rezolvarea modelului matematic iterațiile se repetă pînă la atingerea unei valori a erorii soluției mai mică sau egală cu norma e_1. Cînd această condiție este satisfăcută, se verifică egalitatea inducției magnetice : B_{st} — în zona jugului îngustat prin care se închide fluxul magnetic, cuplat cu cele două bobine ale înfășurării statice și B_{stp} — în zona jugului îngustat prin care se închide fluxul magnetic al șunturilor magnetice. Dacă diferența dintre valorile inducțiilor din aceste două zone ale jugului depășește norma e_2 atunci se recalculează aceste două secțiuni ale jugului și procesul iterativ se reia. Pentru evaluarea erorii de calcul a fost întreprinsă o cercetare experimentală pentru o serie de 10 micromotoare ADA-10, produse de industrie și au fost calculate intervalele limită ale mediei aritmetice a rezultatelor experimentale :

$$\bar{x} - \sigma \cdot \alpha_{st} / \sqrt{n} < x < \bar{x} + \sigma \cdot \alpha_{st} / \sqrt{n}, \tag{11}$$

unde : α_{st} — coeficientul lui Student : x — media aritmetică a șirului de date ; σ — abaterea medie pătratică a șirului de date.

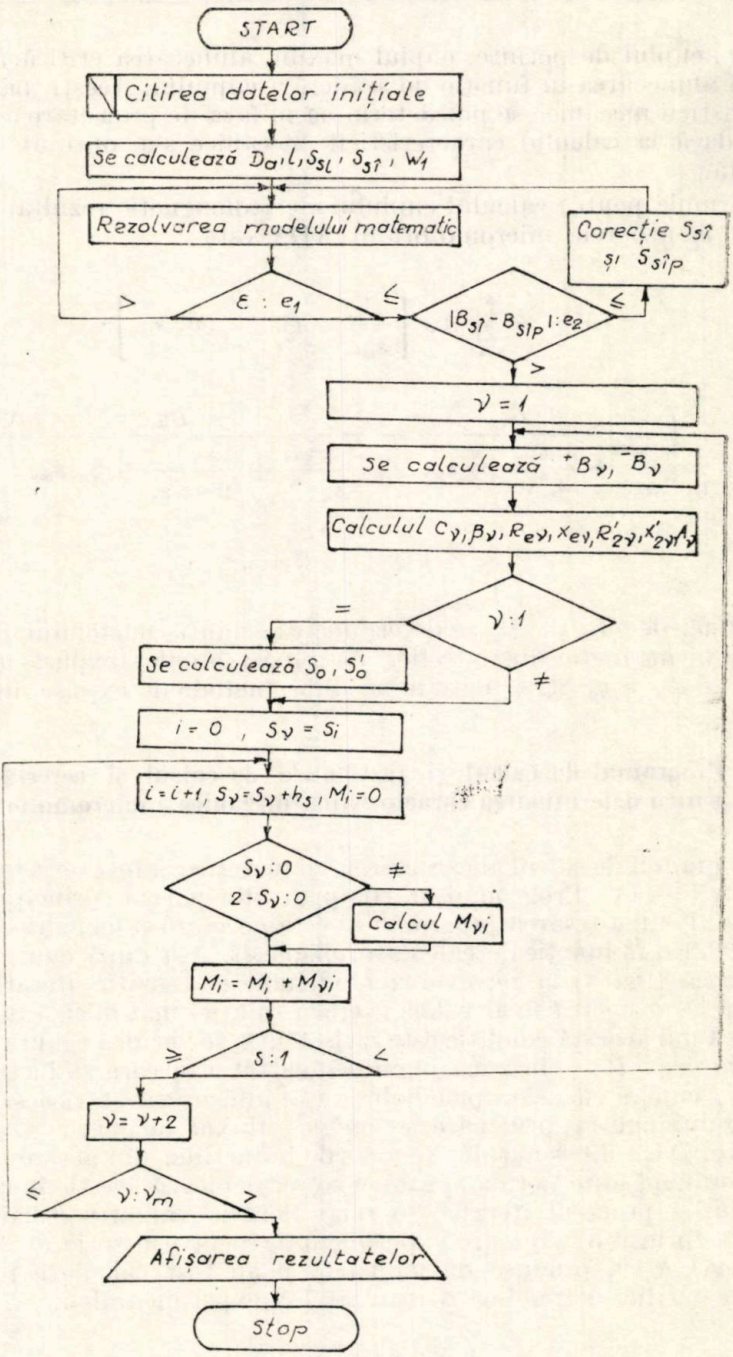


Fig. 4. Algoritmul programului de calcul al caracteristicii mecanice.

În fig. 5 este prezentat intervalul limită al caracteristicii mecanice obținute experimental și caracteristica mecanică calculată cu ajutorul programului elaborat.

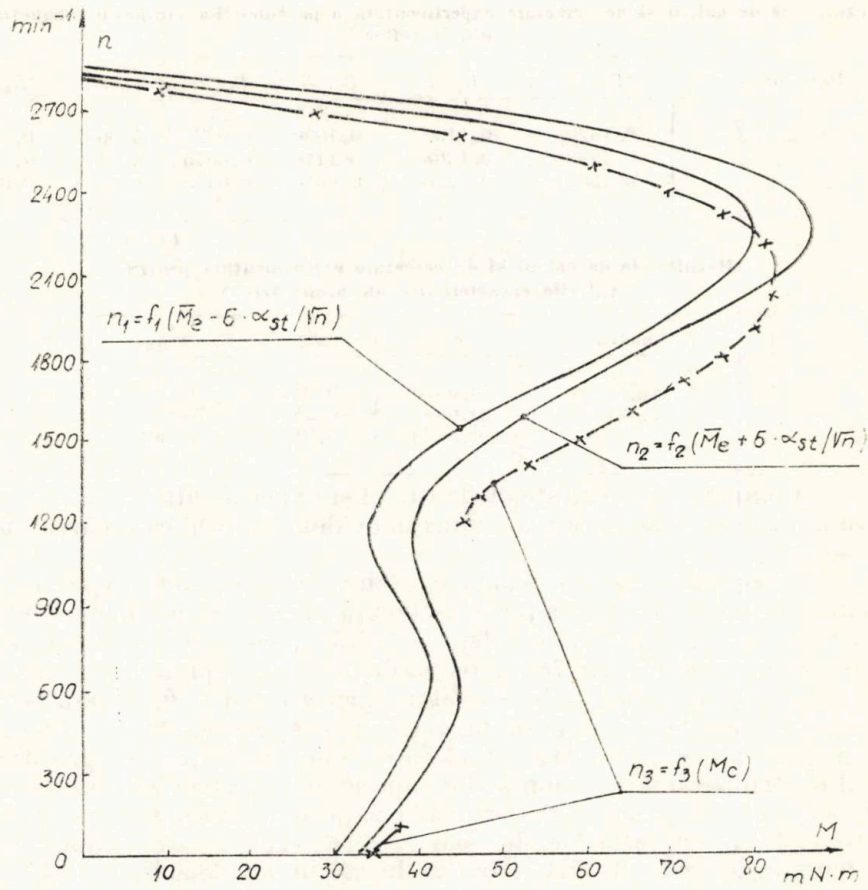


Fig. 5. Rezultatele de calcul și experimentale privind caracteristica mecanică a micromotorului ADA.

6. Concluzii

1. Cu ajutorul modelului matematic al cîmpului magnetic din întrefier s-a ținut seama de fluxurile magnetice cuplate cu o singură bobină a înfășurării statorice și care se închide prin jugurile de secțiune majorată de fluxurile magnetice principale, de fluxurile magnetice care se închid prin șunturile magnetice (spre stator, respectiv spre întrefier).

2. Din comparația rezultatelor de calcul cu cele obținute experimental pentru cîmpul magnetic din întrefier la o serie de micromotoare ADA — 10 a rezultat (tab. 2) că eroarea de calcul a armonicii fundamentale spațiale a inducției nu depășește 5%. Calculul armonicilor spațiale are un caracter informațional; pentru ridicarea preciziei la calculul acestor armonici superioare trebuie să se țină seama de asimetria înfășurării rotorice și de curenții transversali din rotor.

3. Ecuația dedusă pentru calculul alunecării la cîmpul magnetic pulsator oferă posibilitatea determinării tuturor extremelor caracteristicii mecanice în funcție de parametrii schemei echivalente a mașinii asincrone.

Tabelul 2

Rezultatele de calcul şi de cercetare experimentală a parametrilor cîmpului magnetic din întrefier

Parametru	$^{+}B_1$, T	$^{-}B_1$, T	$^{+}B_3$, T	$^{-}B_3$, T	$^{+}B_5$, T	$^{-}B_5$, T
$\bar{B}_v - \sigma \cdot \alpha_{st}/\sqrt{n}$	0,1329	0,1130	0,1030	0,0820	0,0049	0,0228
$\bar{B}_v + \sigma \cdot \alpha_{st}/\sqrt{n}$	0,1443	0,1208	0,1116	0,0875	0,0104	0,0312
B_{vc}	0,1332	0,1120	0,0645	0,0445	0,0268	0,0324

Tabelul 3

Rezultatele de calcul şi de cercetare experimentală pentru valorile caracteristice ale alunecării

Parametru	s'_0	s'_{mz}	s'_{minz}
$\bar{s} - \sigma \cdot \alpha_{st}/\sqrt{n}$	0,0520	0,2410	0,5950
$\bar{s} + \sigma \cdot \alpha_{st}/\sqrt{n}$	0,0587	0,2540	0,6230
$\bar{s}_c$	0,0536	0,3190	0,6010

4. Compararea rezultatelor de calcul şi experimentale a alunecărilor micromotoarelor susmenţionate a pus în evidenţă faptul că eroarea nu depăşeşte 5%.

5. Compararea rezultatelor calculului cu rezultatele experimentale ale caracteristicii mecanice a pus în evidenţă că eroarea de calcul a punctului de cădere al cuplului nu depăşeşte 13%, eroarea de calcul a cuplului maxim nu depăşeşte 7%, eroarea de calcul a cuplului de pornire nu depăşeşte 3%. În gama valorilor alunecării $s \in (0{,}6 - 0{,}9)$ unde se află armonicile spaţiale ale cîmpului magnetic creşte eroarea de calcul a caracteristicii mecanice. Acest fapt arată că este necesară sporirea preciziei de calcul pentru parametrii armonicilor superioare spaţiale ale cîmpului magnetic şi creşterea preciziei determinării parametrilor schemei echivalente electrice. În gama valorilor alunecării $s \in [s'_0, s'_{mz}]$, în care funcţionarea micromotorului este stabilă, eroarea de calcul nu depăşeşte 10%.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. I. Kostrauskas, R. D. Mukulis, T. T. Şimkevicius*, A. S. (URSS). Odnofaznii asinhronnii dvigatieli — Opubl. v B. I., 1969, Nr. 36.
2. *C. Bălă, I. Soran*, Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Seria Electrotehnică, 1979 t. XLI, Nr. 4, p. 27—35.
3. *A. I. Degutis*, Matiematicieskaia modieli electromagnitnoi sistiemii michaniciescaia haracteristica asinhronnovo dvigatielia s asimmetricinim magnitoprovodom statora — Avtorieferat disiertaţii na soiscanii ucionoi stiepieni candidata tiehnicieskih nauc — Kaunas, 1983.
4. *P. I. Kostrauskas*, Elektrotehnica, 1978, t. XIII, S. 95 — 100.
5. *P. I. Kostrauskas, D. A. K. Stroghin*, Voprosu rasciota electromagnitnyh vielicin odnofaznovo asinhronnovo microdvigatielia s asimmietricinim magnitoprovodom statora.- Probliemi tehniciescoi eliectrodinamici. Kiiev, 1977, vip. 64, s. 110—115.
6. *T. T. Shimkevichus, P. I. Kostrauskas, G. R. Slemon*, Performance of single phase asymmetrical — stator induction motor. — The Theses of the International Conference on Electrical Machines. Athens. 1980.

Fractional Horspower Asymmetrical Stator Induction Motor and Methodic for Calculus of the Mechanical Characteristic

A single phase asymmetrical stator induction micromotor (ADA) devoted for the drives with light conditions of starting is presented in this paper. Catalogue data are presented for a few micromotors of this type. The methodic for automatized calculus of the mecanical characteristic of ADA micromotors is discussed. There are compared experimentally obtained results with results of the calculus.

Gh. Hortopan, APARATE ELECTRICE/ Electric Instruments, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984, 630 p., 62 lei.

The switch apparatus design and performance applied in the field of intense currents include both fundamental theoretic knowledge and up-to-date technology. Contents: Basic switch processes; Thermic processes; Electro-dynamic forces; Electromagnetic forces, electro-magnets; Electric contacts; The electric arc in switch apparatus; Electric arc extinction principles and their applications; Apparatus-network interaction; Static switching; Electric apparatus test; Material data and constants.

Gh. Hortopan, ș.a.; APARATE ELECTRICE DE COMUTAȚIE — TEHNICA FENOMENELOR RAPIDE/Electrical Power Switch Apparatus — Rapid Phenomena Technique, Editura Tehnică, București, 1985. 359 p.

The tendency of limitation of the short-circuit current effects and the thermal effects in the arc chutes is present in the electrical power switch apparatus technique.

New types of electrical power switch have been developed, as well as new methods for investigation the performances of these apparatus. The authors show new and original designs for fast acting power apparatus and for the electronic, used for modelling or measuring the apparatus performances.

The presented power apparatus, the modelling methods, the calculations as well as measuring methods, represent the authors inovations, who are working in the mentioned domain, for many years, in the Polytechnic Institute of Bucharest.

Numerous experimental measurements, concluded with oscilograms, contribute to the emphasizing of the dynamic process in the power apparatus.

The paper includes a comprehensive bibliography, 250 drawings, diagrams and oscillograms

Al. Fransua, R. Măgureanu: ELECTRICAL MACHINES AND DRIVE SYSTEMS. A TRANS-CULTURAL APPROACH, Technical Press Oxford in collaboration with Editura Tehnică, București, România, 1984.

The present work is concerned with the basic phenomena, characteristics and performance of the main types of electrical machines and modern industrial drives. The book is meant to ensure a thorough understanding of all the phenomena related to present day drive systems and their main components, irrespective of their principle of operation.

The book is made up of nine chapters. The first of these briefly discusses the fundamental laws of electrical engineering and mechanics which are directly relevant to the study of the electromechanical or electrical elements of drive systems.

The second chapter is devoted to the study of the actuators and control elements used in electrical drives and of their two main components; the electric motor and the mechanical load (process). Chapters 3, 5, 6 and 7 are concerned with the main problems related to the use of d. c. machines, transformers and induction coils, and of synchronous and induction motors in modern industrial drives.

Chapter 4 offers an original and thorough analysis of the operation of the most widely used semiconductor converters used as actuators in d. c. drives.

The main problems here concern discontinuous conduction diode and thyristor communication power considerations, circulation currents, rectifier-inverter reversibility, regenerative braking, etc.

Chapter 8 is concerned with a. c. drives, and with controlled semiconductor converters supplying synchronous and induction motors.

Finally, the last chapter is devoted to electrical drives for accurate positioning by means of stepper motors, synchros, or inductosyns.

R., Măgureanu, D. Micu, CONVERTIZOARE STATICE DE FRECVENȚA ÎN ACȚIONĂRI CU MOTOARE ASINCRONE/Frequency Static Converters in Asynchronous Motor Drives, Editura Tehnică, București, 1985, 326 p.

Different solutions are given for designing inverters with printed current or tension, with or without time-modulation, relying on various kinds of switch semi-conductors, gate-GTO output or rapid tyristors, MOSFET or bi-polar power transistors.

The optimal command of these drives is defined on basis of electrical machines general pattern which both synthesizes the system controller and analyses machine behaviour under supply harmonics conditions.

To control these systems, analogue solutions are advanced in connection with discrete and VISI digital specialized circuits or microprocessors.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1984—1985

Silviu Zissu — Contribuții în problema determinării pierderilor suplimentare în căile conducătoare de curent în regim deformant. (9.III.1985)

Nicolae Vasile — Contribuții la studiul motoarelor sincrone cu magneți permanenți. (24.IV.1985)

Gheorghe Gavrilă — Contribuții la studiul fenomenelor elecromagnetice tranzitorii în bobine și transformatoare electrice. (15.V.1985)

Emanoil Cocoș — Contribuții teoretice și experimentale privind compensarea fenomenelor deformante. (18.XII.1985)

c. 1747 — I.P. Informația

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTRONICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ—САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адреску института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continues les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

1986 NOV 13

Lei 70